МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

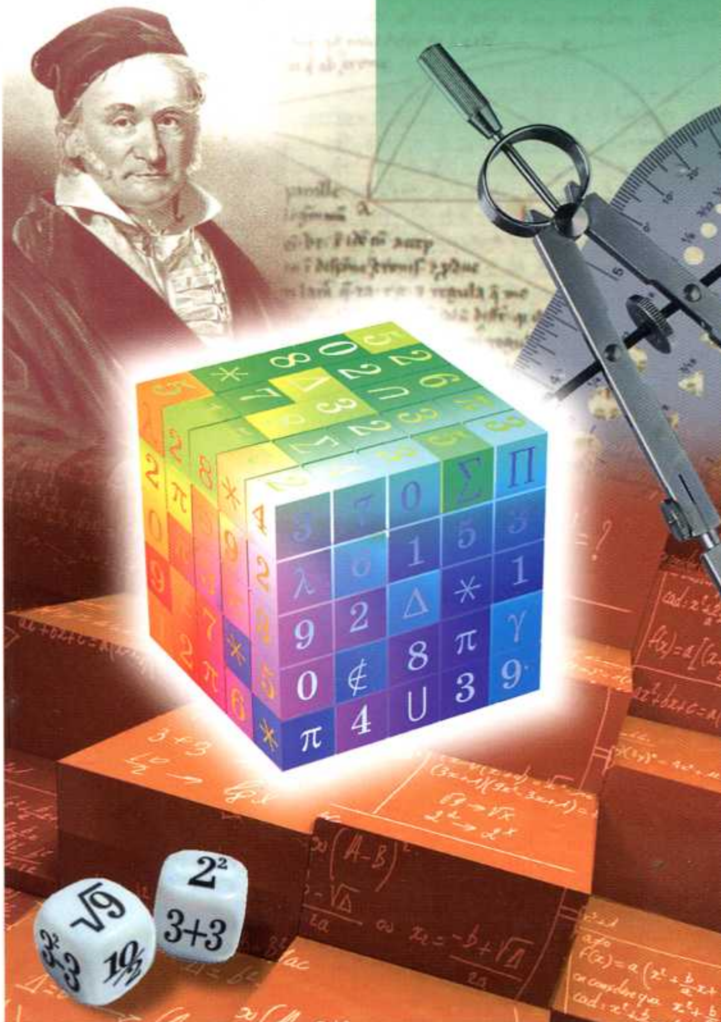
Г. К. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

11 класс

ФГОС



ВЕРТИКАЛЬ

ДРОФА

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

11 класс

Г. К. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебник

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

ВЕРТИКАЛЬ

МОСКВА

ДРОФА

2014

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
М91

Муравин, Г. К.

М91 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 кл. : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. — М. : Дрофа, 2014. — 318, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-358-10963-6

Учебник является частью УМК по математике для 10—11 классов, изучающих предмет на углубленном уровне. Теоретический материал разделен на обязательный и дополнительный, система заданий дифференцирована по уровню сложности, каждый пункт главы завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашней контрольной работой. В учебник включены темы проектов и сделаны ссылки на интернет-ресурсы.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования, имеет гриф «Рекомендовано» и включен в Федеральный перечень.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-358-10963-6

Оглавление

Глава 6. Элементы теории вероятностей и статистики

Глава 7. Комплексные числа

Уважаемые старшеклассники!

В этом году вы завершаете изучение школьного курса математики. Авторы постарались помочь вам как в изучении нового материала, так и в повторении изученного ранее. Знать математику — это значит уметь решать задачи. Именно задачи вам предстоит решать на ЕГЭ. В учебнике задачи разной степени трудности.

В задачах, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытать затруднений. Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу, как правило, связан с некоторыми техническими сложностями.

Задачи, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●». План решения таких задач полезно обсудить в классе с учителем.

Символом «*» обозначены наиболее трудные задачи.

Значком «■» отмечены задания, которые следует выполнять с помощью калькулятора. В учебнике рассматривается калькулятор операционной системы Windows.

При изучении математики в 11 классе вам предстоит строить много графиков. В некоторых случаях работу в тетради полезно совмещать, а иногда и заменять работой на компьютере в одной из компьютерных программ построения и исследования графиков функций и уравнений. Такие программы свободно и бесплатно распространяются в Интернете. Мы рекомендуем две русифицированные программы GeoGebra и WinPlot, а также электронное приложение к учебнику, которое размещено на сайте www.drofa.ru.

Программу GeoGebra можно скачать без регистрации с сайта http://www.geogebra.org. На этом же сайте вы детально познакомитесь с возможностями программы.

В тексте учебника рекомендация использовать компьютерные приложения обозначается символом .

Вместе с основным материалом, изучение которого обязательно, в учебнике есть и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало дополнительного материала обозначается «▼», а конец — «△».

В разделе «Основные формулы» в конце учебника вы можете найти нужную формулу.

Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике.

Если выполнить задание вы не можете, то прочитайте совет к задаче или посмотрите её решение. В этом вам помогут разделы «Ответы», «Советы» и «Решения».

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а к главам учебника предлагаются домашние контрольные работы с указанием примерного времени, на которое рассчитано их выполнение.

Задания домашних контрольных работ разбиты на три уровня, которые соответствуют удовлетворительной, хорошей и отличной оценке, так что вы сами сможете оценить свои математические достижения.

Если вы можете ответить на контрольные вопросы, справляетесь с контрольными заданиями и выполнили домашнюю контрольную работу, значит, материал вами усвоен.

В конце учебника имеется предметный указатель, особенно полезный при повторении.

В учебник не вошли многие важные и интересные математические вопросы, поэтому для тех, кто интересуется математикой, в справочном разделе учебника имеется список дополнительной литературы и интернет-ресурсов.

Авторы желают вам успехов!

Глава 1

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ

В первом пункте этой главы речь пойдёт о различии между описательно-интуитивными и строгими математическими определениями, во втором пункте вы познакомитесь с важнейшим математическим понятием предела функции, а в третьем пункте вычисление пределов позволит более точно строить графики функций.

1. Непрерывность функции

В 10 классе вы познакомились с терминами «непрерывность функции», «промежуток непрерывности функции» и «точка разрыва функции». На рисунке 1 изображён график *непрерывной функции* $y = x^2$.

Кусочно-заданная функция $y = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$ (рис. 2),

известная в математике как функция $y = \operatorname{sign} x$[1], имеет разрыв в точке $x = 0$.

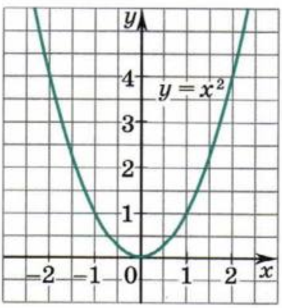


Рис. 1

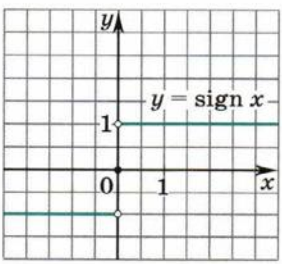


Рис. 2

[1] Функция сигнум (sign — сокращение латинского слова signum — знак) была введена немецким математиком, иностранным членом-корреспондентом Петербургской академии наук Л. Кронекером в 1878 г.

Первый из графиков можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги, а при изображении второго карандаш придётся оторвать. Именно на этом основывалось начальное представление о непрерывности функций, которым вы пользовались в 10 классе. Так, в частности, свойство сохранять знак, которым обладает непрерывная функция, которая не обращается в нуль на промежутке, позволяло решать неравенства методом интервалов.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{x^2-3x-4}{\log_2(2x+3)-3} \leqslant 0.$

Решение.

1 Найдём границы промежутков знакопостоянства функции, заданной левой частью неравенства. К этим границам относятся нули числителя, нуль знаменателя, и, конечно, сами промежутки должны входить в ОДЗ неравенства (область допустимых значений переменной x). ОДЗ: $\log_2(2x+3)-3 \neq 0,$

$$\begin{cases} 2x+3>0, \\ 2x+3\neq 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x\neq 2{,}5. \end{cases}$$

Нули числителя: $x^2-3x-4=0, \quad x_1=-1,\ x_2=4.$

Нуль знаменателя: $x=2{,}5.$

2 Отметим найденные границы с учётом нестрогости данного неравенства (рис. 3, *а*).

3 Определим знаки функции на отмеченных промежутках и проведём кривую знаков.

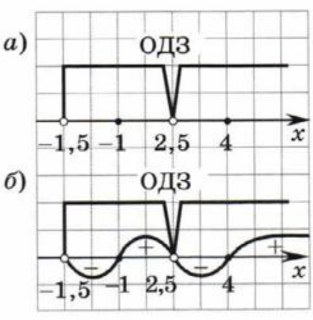


Рис. 3

На самом правом промежутке положителен и числитель, и знаменатель дроби, а при переходе через точки 4, 2,5 и −1 или числитель, или знаменатель свой знак изменяют, что влечёт изменение знака функции (рис. 3, *б*).

Ответ: $-1{,}5<x\leqslant -1;\ 2{,}5<x\leqslant 4.$

Образных представлений о непрерывности было вполне достаточно для решения различных задач, пока речь шла об элементарных функциях[1]. Однако переход к более

[1] Напомним, что к ***элементарным*** относятся функции, задаваемые формулами, содержащими степени, радикалы, логарифмы, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также дроби и арифметические знаки действий.

сложным числовым функциям заставил математиков задуматься над проблемой строгости своей науки и, в частности, сформулировать определения на математическом языке. Так, как сформулировано, например, определение возрастающей функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей на множестве S***, если для любых двух чисел x_1 и x_2, принадлежащих этому множеству, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$.

В отличие от этого определения, основанного на простом сравнении чисел, говоря о непрерывности, мы оперируем неким описательным понятием *возможности изображения карандашом*. Однако здравый смысл подсказывает, что уже первый из упомянутых в этом пункте графиков, график функции $y = x^2$, изобразить карандашом нельзя, поскольку он бесконечен, а изображаем мы лишь его часть. Но если график вообще нельзя изобразить, то вопрос о том, как именно его нельзя изобразить, отрывая или не отрывая карандаш от бумаги, звучит несколько странно.

Обойти проблему бесконечности можно, рассматривая графики функций на небольших участках, т. е. в ближайших окрестностях точек графика.

В точке x_0 функция $y = f(x)$ может оказаться непрерывной (рис. 4) или иметь в ней разрыв (рис. 5).

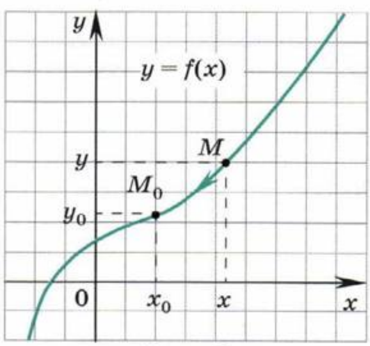


Рис. 4

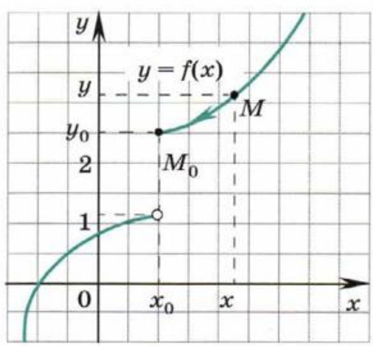


Рис. 5

На рисунке 4 точка $M(x;\ y)$, изображающая остриё грифеля карандаша, двигаясь по графику функции, *может* оказаться *как угодно близко* к точке $M_0(x_0;\ y_0)$. При этом всё меньше и меньше будут отличаться друг от друга как абсциссы точек M и M_0, так и их ординаты. Заметим, что абсциссы точек M и M_0 отличаются на $|x - x_0|$, а их ординаты на $|y - y_0|$ (модули здесь поставлены, чтобы учесть возможность приближения к точке M_0 с другой стороны, чем изображено на рисунке). Изменяя абсциссу точки M, мы можем так уменьшить значение $|x - x_0|$, что соответствующее значение $|y - y_0|$ станет как угодно малым, т. е. меньшим, чем любое заранее заданное положительное число. На этом и основывается строгое математическое определение непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$[1].

Это определение было предложено знаменитым французским математиком Огюстеном Луи Коши[2] в 20-е гг. XIX в.

Пример 2. Доказать, что функция $y = 2x + 3$ непрерывна в любой точке x_0.

Доказательство. Для произвольного положительного числа ε нам нужно найти такое число δ, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следовало неравенство $|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon$.

Преобразуем последнее неравенство:

$$|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2x - 2x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon$, что и означает, согласно определению, непрерывность функции $y = 2x + 3$ в точке x_0.

[1] Знак следования «$\Rightarrow$» использован здесь в том же смысле, что и в 10 классе, когда шла речь о следовании и равносильности. А вообще, $A \Rightarrow B$ значит в точности то же, что и знакомая конструкция теорем: «Если верно утверждение A, то верно и утверждение B».

[2] О. Коши опубликовал это определение в 1823 г., однако на шесть лет раньше его сформулировал чешский математик Б. Больцано, чьи труды стали известны значительно позже работ Коши.

Примерно по такой же схеме доказывается факт непрерывности любой из элементарных функций в любой точке области её определения, который мы приняли без доказательства.

▼ Пример 3. Доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$.

Доказательство. Нужно найти, каким следует брать число δ, чтобы для любого x, такого, что $|x - 1| < \delta$, выполнялось неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

$$|x^2 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - 1)(x + 1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1||x + 1| < \varepsilon.$$

Можно сразу ограничиться рассмотрением значений x из единичной окрестности точки $x_0 = 1$: $0 < x < 2$. Для любого из таких значений $|x + 1| < 3$. С учётом этого, для любого $\varepsilon > 0$, взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, получим:

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1||x + 1| < \delta|x + 1| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x - 1||x + 1| < 3\delta \Leftrightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon. \triangle$$

Замечание. Определение непрерывности функции в точке неприменимо, когда речь идёт о границах отрезка, являющегося областью определения функции. Действительно, при $x < a$ и при $x > b$ (рис. 6) неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, где $D(f) = [a; b]$, теряет смысл, так как не определена сама функция $y = f(x)$.

В таких точках можно говорить только об односторонней непрерывности, убирая в определении непрерывности модуль из неравенства $|x - x_0| < \delta$. При этом соответствующая часть определения будет выглядеть так:

$0 \leqslant x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (непрерывность справа)

или так:

$0 \leqslant b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$ (непрерывность слева).

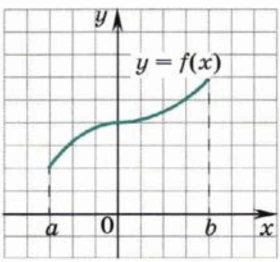


Рис. 6

С учётом сделанного замечания сформулируем определение непрерывной функции.

Функция, непрерывная во всех точках промежутка, является на этом промежутке ***непрерывной***.

На рисунке 5 легко видеть, что в точке x_0 функция не является непрерывной — как бы близко слева от этой точки ни брали x, разность $f(x) - f(x_0)$ останется больше некоторого положительного числа, большего 1.

Поскольку элементарные функции непрерывны на любом промежутке, входящем в область определения, они могут иметь разрывы только в точках, ограничивающих область определения. Вернёмся к рисунку 5, на котором график функции $y = f(x)$ имеет разрыв при $x = x_0$. Функция совершает скачок в точке x_0. Как бы близко слева от этой точки мы ни брали значение x, значение $|f(x_0) - f(x)|$ останется больше некоторого положительного числа. Это значит, что для точки x_0 не выполняется определение непрерывности функции.

На рисунках 7 и 8 показаны графики функций, имеющие разрыв в точке x_0, которая не входит в область определения. Однако при этом в некоторой окрестности слева и справа от точки x_0 функции определены.

Точку x_0, входящую в область определения функции, называют ***точкой разрыва функции***, если функция в ней не является непрерывной.
Точку x_0, не входящую в область определения функции, называют ***точкой разрыва функции***, если и слева, и справа от неё как угодно близко к точке x_0 есть точки, в которых функция определена.

На рисунке 7 хорошо вам известная гипербола $y = \frac{1}{x}$, а на рисунке 8 вы видите график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, который при

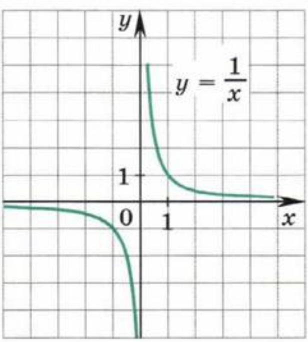


Рис. 7

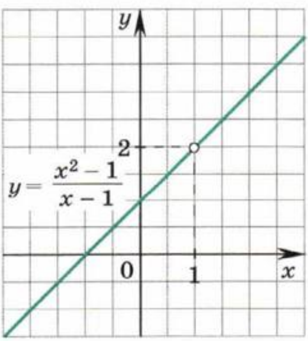


Рис. 8

всех x, кроме $x = 1$, совпадает с графиком линейной функции $y = x + 1$. В отличие от ***бесконечного разрыва*** функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$, разрыв функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 1$ называют ***устранимым***. Этот разрыв можно устранить, доопределив функцию y так: $y(1) = 2$.

Пример 4. Устранить разрыв функции

$$y = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}.$$

Решение. Данная функция имеет разрыв в точке $x = 1$. Устранить разрыв — это значит найти непрерывную функцию, которая совпадает с данной функцией во всех точках, кроме точки разрыва.

Преобразуем дробь, задающую функцию, рассматривая её числитель как квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$:

$$\frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}.$$

Функция $y = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$ совпадает с функцией $y = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}$ при всех значениях аргумента, кроме $x = 1$, и является элементарной, а значит, непрерывной во всех точках своей области определения, в частности в точке $x = 1$.

Ответ: $y = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$.

Упражнения

1. Среди указанных функций найдите функции, имеющие разрывы. Укажите точки разрыва:

1) $y = x^5 + x^3 + 7$;

2) $y = 5x + \frac{1}{x}$;

3) $y = \operatorname{tg} x$;

4) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ 2x \text{ при } x > 0; \end{cases}$

5) $y = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}$;

6) $y = 3^x + \lg x$;

7) $y = \dfrac{|x+5|}{2^x}$;

8) $y = \sin x - \cos^2 x$;

9) $y = \begin{cases} x+2 \text{ при } x < -1, \\ x^2 \text{ при } -1 \leqslant x < 2, \\ 5 - x \text{ при } x \geqslant 2. \end{cases}$

2. ● 1) Сформулируйте условие, достаточное для того, чтобы непрерывная функция имела нуль на отрезке $[a; b]$.

2) Используйте это условие для составления плана поиска на отрезке [4; 5] приближённого значения корня уравнения $x^3 - 2x^2 - 8x - 12 = 0$.

3) ■ Действуя по составленному плану, найдите с помощью калькулятора корень с точностью до 0,01.

3. Решите методом интервалов неравенство:

1) $(x^2 - 4)(x^2 - 9) > 0$;

2) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{2x-1} < 0$;

3) $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{4 + 3x - x^2} > 0$;

4) $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{x+3} < 0$.

4. Приведите пример функции, непрерывной:

1) на множестве действительных чисел;

2) при всех значениях x, кроме $x = 4$;

3) при всех значениях x, кроме x, равных 1, 2 и 3.

5. ○ В результате каких преобразований из графика функции $y = f(x)$ получится график функции:

1) $y = f(kx + b)$;

2) $y = kf(x) + b$;

3) $y = -f(x)$;

4) $y = |f(x + a)|$;

5) $y = f(|x|)$;

6) $y = |f(|x|)|$?

6. Постройте график функции:

1) $y = 2x^2 - 1$;

2) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) ● $y = |2^x - 2|$;

4) ● $y = |2\cos x| + 1$;

5) ● $y = |\log_2|x - 2||$;

6) ● $y = (|x| - 2)^2$.

7. На рисунке 9 изображены графики функций.

1) Какие из этих функций:

а) имеют разрывы;

б) имеют устранимые разрывы?

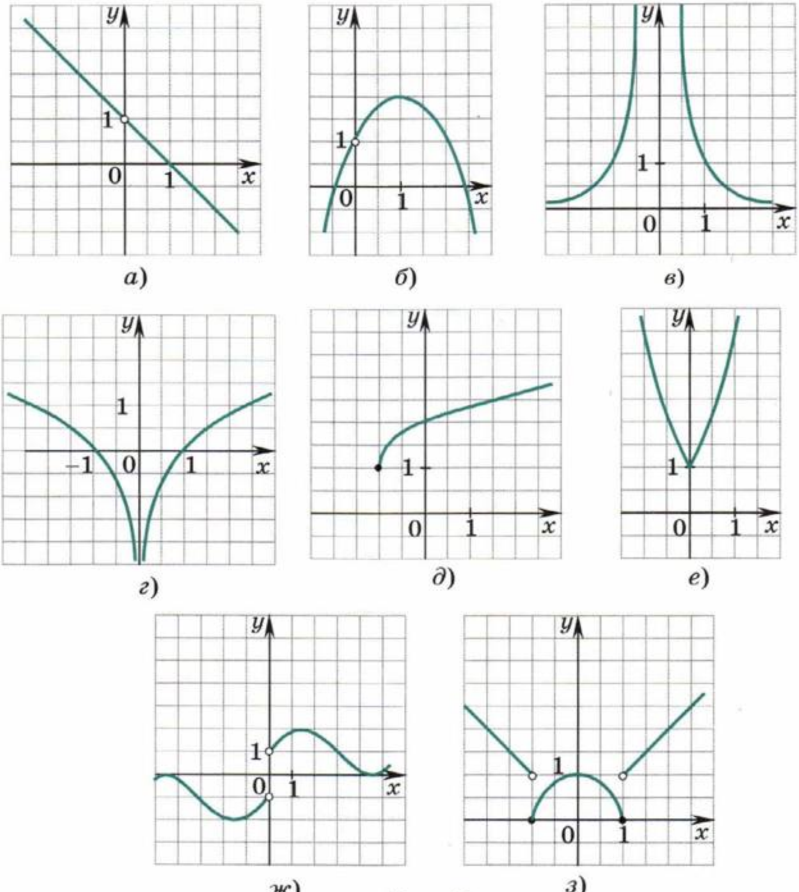


Рис. 9

2) Найдите для каждого графика соответствующую ему функцию из следующего списка:

$$y = \frac{x - x^2}{x},\ y = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ при } |x| \leqslant 1, \\ |x| \text{ при } |x| > 1, \end{cases}\ y = \frac{1}{x^2},\ y = 1 + \sqrt{x+1},$$

$$y = \log_2 |x|,\ y = \frac{x + 2x^2 - x^3}{x},\ y = (|x| + 1)^2,\ y = \sin x + \frac{|x|}{x}.$$

8. Вы знаете определение модуля: $|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$

Есть ли отличия у функций $y = |x|$ и $y = x \cdot \operatorname{sign} x$? Можно ли задать функцию сигнум так: $\operatorname{sign} x = \frac{|x|}{x}$?

9. Как называют $|x - x_0|$, если x_0 — приближённое значение x?

10. Укажите самый широкий числовой интервал, все точки которого удовлетворяют неравенству:

1) $\left|x - \frac{3}{7}\right| < 0{,}01$;

2) $\left|x + \frac{5}{11}\right| < 0{,}001$;

3) $|x - 1| < \delta$;

4) $|x - x_0| < \delta$;

5) $|x - \pi| < 0{,}00001$.

11. Запишите в виде $|x - x_0| < \delta$ двойное неравенство:

1) $-1 < x < 1$;
2) $0 < x < 2$;
3) $-2 < x < 0$;
4) $1 < x < 3$;
5) $-2 < x < 1$;
6) $-5 < x < -1$.

12. Используя геометрическую интерпретацию модуля разности на координатной прямой, решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} |x - 2| < 0{,}6, \\ |x - 1| < 0{,}7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x + 2| < 0{,}7, \\ |x + 1| < 0{,}6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x - 2| > 0{,}6, \\ |x - 1| < 0{,}7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} |x + 2| < 0{,}6, \\ |x + 1| > 0{,}7. \end{cases}$

13. Докажите, что линейная функция:
1) $y = 2 - 5x$;
2) $y = kx + l$
непрерывна в любой точке x_0.

14. Докажите, что функция $y = 3x + |x|$ непрерывна:
1) в точке $x_0 = 0$;
2) в любой точке x_0.

15. Докажите, используя определение непрерывности, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x = 0$.

16. Устраните разрыв функции:

1) $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2}{x^2}$;

2) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$;

3) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{3 - x}$;

4) $y = \dfrac{(x^2 + x - 2)(x + 3)}{x^2 + 2x - 3}$;

5) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$;

6) $y = \dfrac{64 - x^2}{2 - \sqrt[3]{x}}$.

17. 1) Найдите область определения и точки разрыва функции:

а) $y = \dfrac{2x+6}{x^2-9}$; г) $y = \dfrac{1}{1-x}$;

б) $y = \dfrac{x^2}{x^3-2x^2-8x}$; д) $y = \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$;

в) $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}$; е) $y = \dfrac{1-x}{1-\sqrt[4]{x}}$.

2) Есть ли среди разрывов: а) бесконечные; б) устранимые?

18. Задайте формулой функцию, совпадающую с функцией $y = 3^x$ во всех точках, кроме $x = 2$.

19. Докажите, что функция Дирихле[1] $y = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in Q, \\ 0 \text{ при } x \in I, \end{cases}$ где Q — множество рациональных чисел, I — множество иррациональных чисел, разрывна в каждой точке.

20. *Докажите, что функция Римана[2] $y = \begin{cases} \dfrac{1}{q} \text{ при } x = \dfrac{p}{q}, \\ 0 \text{ при } x \in I, \end{cases}$ где $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$ и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима, разрывна в любой рациональной точке и непрерывна в любой иррациональной точке ($\boldsymbol{Z}$ — множество целых, а $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел).

! Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте известные вам свойства функций, связанные с их непрерывностью.

2. Изобразите график функции, имеющей в точке $x_0 = 1$: 1) бесконечный разрыв; 2) устранимый разрыв. Задайте аналитически какую-нибудь функцию, имеющую устранимый

---

[1] *Петер Дирихле* (1805—1859) — немецкий математик, основные труды которого посвящены механике и математической физике. В нашем курсе используется его определение понятия функции.

[2] *Бернард Риман* (1826—1866) — немецкий математик, учился, а с 1857 г. и преподавал в Гёттингенском университете. В 33 года Риман стал профессором этого университета, в 40 лет умер от туберкулёза. Полное собрание его трудов составило около 500 страниц, которые легли в основу курсов математической физики, электричества и магнетизма, а также математики. Заметим, что Риман слушал лекции Дирихле в Берлинском университете в 1847—1849 гг.

разрыв в этой точке, и функцию, которая получится после устранения этого разрыва.

3. Решите неравенство $\dfrac{2x^2 + 3x - 5}{3x^2 - x - 2} \leqslant 0$.

2. Предел функции

Функции, графики которых изображены на рисунках 10 и 11, отличаются только наличием или отсутствием значения в точке x_0. Точка $M(x; y)$, двигаясь по любому из графиков, *может* оказаться *как угодно близко* к точке $M_0(x_0; y_0)$. Независимо от того, принадлежит ли точка M_0 графику функции (как на рис. 10) или нет (как на рис. 11), при приближении абсциссы точки M к x_0 её ордината $f(x)$ становится как угодно близка к y_0. Можно сказать, что, когда x *стремится* к x_0, $f(x)$ *стремится* к y_0.

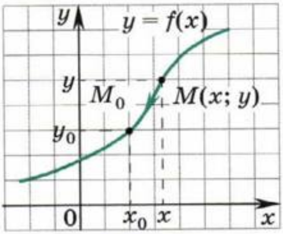


Рис. 10

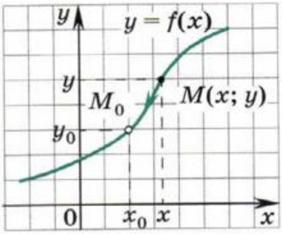


Рис. 11

Слово «стремится» в русском языке обычно означает процесс приближения к некоторой цели, но не само её достижение. Точно так же «*x стремится к x_0*» означает, что x принимает значения как угодно близкие, *но не равные* x_0. Правда, по отношению к $f(x)$ такого ограничения нет — в процессе своего *стремления* $f(x)$ может принимать значения, равные y_0.

В ситуации, когда при стремлении x к x_0 $f(x)$ стремится к y_0, математики обычно говорят о **пределе функции в точке.**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0}$$

(Читается: «*Предел $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, равен y_0*»[1].)

---

[1] Обозначение lim — сокращение латинского слова limes, которое в переводе означает «граница, предел». Слово limes для обозначения предела впервые применил И. Ньютон, символ же lim ввёл французский учёный С. Люилье в 1786 г.

Условие существования предела функции в точке x_0 отличается от условия непрерывности дополнительным ограничением на значения x, которые, как мы отмечали, не могут равняться x_0, т. е. значения $|x - x_0|$ должны быть строго больше нуля. Кроме того, ордината y_0 точки M_0 может и не быть значением функции в точке x_0 (см. рис. 11).

С учётом этого определение предела выглядит следующим образом[1].

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 ***предел***, равный y_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Из схожести определений предела и непрерывности следует, что предел в точке x_0 имеют только функции, которые в этой точке или непрерывны, или имеют устранимый разрыв.

Заметим, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $y_0 = f(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (см. рис. 10). Верно и обратное утверждение: если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos 2x + 1}{\sin x}$.

Решение. В точке $\frac{\pi}{6}$ элементарная функция $y = \dfrac{\cos 2x + 1}{\sin x}$ определена и, значит, непрерывна:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x + 1}{\sin x} = \frac{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + 1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{0{,}5 + 1}{0{,}5} = 3.$$

[1] Такое определение предела на «языке ε, δ» встречается уже в 1880 г. у немецкого математика К. Вейерштрасса.

Если же в точке x_0 функция имеет устранимый разрыв (см. рис. 11), то при вычислении предела в этой точке его сначала устраняют, т. е. заменяют функцию $y = f(x)$ функцией $y = \varphi(x)$, непрерывной в точке x_0, а в других точках совпадающей с $y = f(x)$. После чего находят $y_0 = \varphi(x_0)$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$.

Р е ш е н и е. Число 2 не входит в область определения функции $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$, при этом значении x в нуль обращаются и знаменатель, и числитель дроби. Преобразуем эту дробь:

$$\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2(x-2)(x+0{,}5)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2(x+0{,}5)}{x+2}.$$

Функция $y = \dfrac{2(x+0{,}5)}{x+2}$ непрерывна в точке $x = 2$, а во всех других точках своей области определения совпадает с функцией $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$. Значит:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x+0{,}5)}{x+2} = \frac{2(2+0{,}5)}{2+2} = \frac{5}{4}.$$

П р и м е ч а н и е. Обычно решение оформляется так:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x+0{,}5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x+0{,}5)}{x+2} =$$

$$= \frac{2(2+0{,}5)}{2+2} = \frac{5}{4}.$$

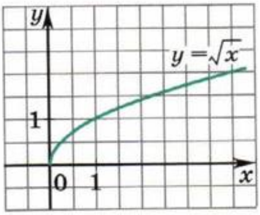


Рис. 12

При рассмотрении непрерывности функции в точках, ограничивающих её область определения, было введено понятие односторонней непрерывности. По тем же соображениям следует говорить об ***одностороннем, правом пределе***, например функции $y = \sqrt{x}$ при x, стремящемся к нулю (рис. 12).

▼ Как и в случае с односторонней непрерывностью, разница в определениях предела и одностороннего предела заключается в наличии или отсутствии модуля.

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 ***правый предел***, равный y_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon. \ \triangle$$

Чтобы отличать обозначение одностороннего от обозначения ***двустороннего предела***, вверху справа от x_0 ставят знак «$-$» для левого и знак «$+$» для правого предела, например $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$. Левый и правый пределы функции в точке x_0 могут и не совпадать, так, например, для функции $y = x + \dfrac{|x|}{x}$ (рис. 13) имеем:

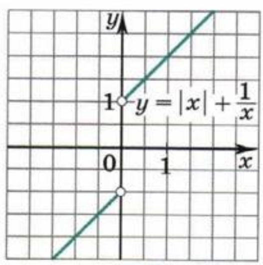


Рис. 13

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 0 + 1 = 1;$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = 0 - 1 = -1.$$

Понятно, что двусторонний предел $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + \dfrac{|x|}{x} \right)$ не существует.

▼ В определениях возрастания, непрерывности и предела функции, да и вообще в математических текстах, часто используются слова «все», «для всякого», «каким бы ни был», «любой». Для лучшего зрительного восприятия (и экономии места и времени) математики договорились использовать вместо них специальный символ — ***квантор общности*** «$\forall$», который представляет собой перевёрнутую букву «A», первую букву английского слова all — «все, всё». Аналогично, слова «существует», «найдётся» заменяют ***квантором существования*** «$\exists$» — перевёрнутая буква «E», первая буква английского слова exists — «существует»[1].

[1] В конце XIX в. независимо друг от друга американский математик Ч. Пирс и немецкий математик Ф. Фриге ввели понятие квантора.

Так, например,

$\exists y_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$ — это условие, определяющее существование левого предела в точке x_0. △

Упражнения

21. 1) С помощью графика функции $y = f(x)$ (рис. 14) найдите:

а) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$; в) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to 3{,}5} f(x)$; г) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

2) В каждой ли точке области определения данная функция имеет предел?

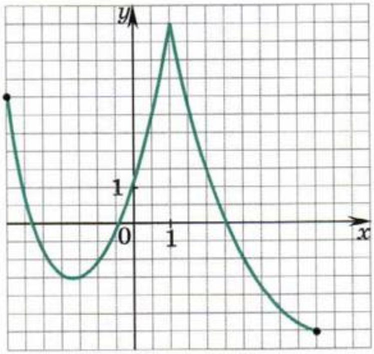


Рис. 14

22. Используя определение предела, докажите, что:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = 5$; 2) $\lim\limits_{x \to 4} (0{,}5x + 2) = 4$.

Какое свойство элементарных функций позволяет быстро находить такие пределы?

23. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x \to -1} (x^5 - 1)$; 4) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{2^x}$;

2) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 6x + 9)$; 5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2\operatorname{tg} x)$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x - 2}$; 6) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{6}} \dfrac{3 - 2x}{6x + 1}$.

24. 1) Какая из функций, графики которых изображены на рисунке 15, имеет предел при $x \to 2$?

2) Если функция имеет предел, то чему он равен?

3) Какие из функций: не имеют разрывов; имеют разрывы; имеют устранимые разрывы?

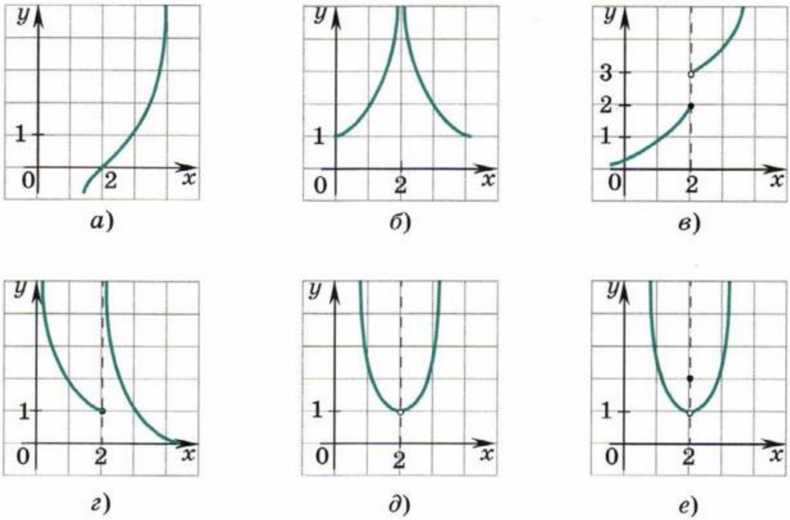


Рис. 15

25. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$;

3) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 3x + 2}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x + \sin x}$.

26. Имеют ли в точке a пределы следующие функции:

1) $y = \dfrac{x^2}{3}$, $a = 0$;

2) $y = \dfrac{2}{3 - x}$, $a = 3$;

3) $y = |x - 1|$, $a = 1$;

4) $y = \dfrac{|x|}{3x}$, $a = 0$?

27. Изобразите график какой-нибудь функции $y = f(x)$, если:

1) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$;

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$;

4) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = -\frac{1}{2}$.

28. Какие из следующих утверждений верны:

1) непрерывная функция имеет предел в каждой точке области определения;

2) непрерывная функция может не иметь предела в некоторой точке области определения;

3) функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

4) разрывная функция не имеет предела в точке разрыва;

5) разрывная функция может иметь предел в точке разрыва;

6) разрывная функция имеет предел в точке разрыва, только когда разрыв устранимый?

29. С помощью графиков функций (рис. 16) ответьте на следующие вопросы.

1) Какие функции имеют двусторонние пределы в точке $x_0 = 2$?

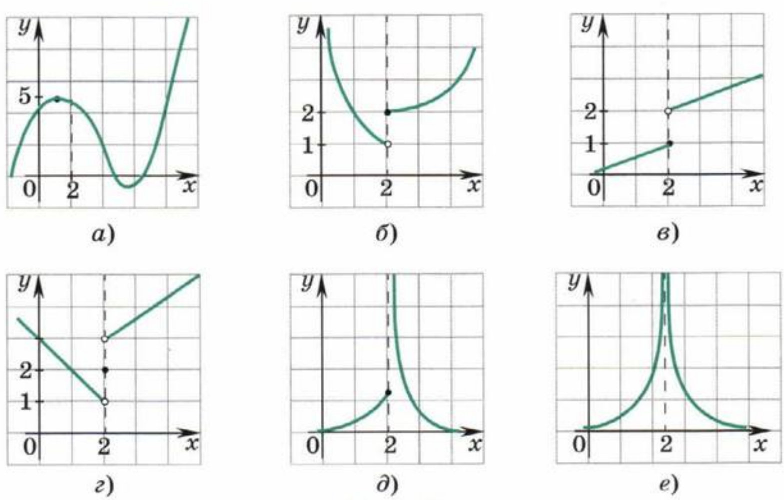


Рис. 16

2) Какие функции имеют односторонние пределы в точке $x_0 = 2$?

3) Найдите предел функции в точке $x_0 = 2$, если он существует.

30. Найдите односторонние пределы функций:

1) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 3x - 5 \text{ при } x > 1 \end{cases}$ при $x \to 1$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ при $x \to 1$.

31. Запишите с помощью кванторов определение функции, непрерывной:

1) в точке x_0;

2) справа в точке x_0;

3) слева в точке x_0.

32. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху*, если $\exists a\ \forall x \in D(f),\ f(x) < a$.

1) Запишите с помощью кванторов определение функции, *ограниченной снизу*, т. е. такой функции, все значения которой больше некоторого числа.

2) Будет ли условие $\exists a\ \forall x \in D(f),\ f(x) < a$ по-прежнему определять функцию, ограниченную сверху, если кванторы в нём поменять местами:

а) $\forall x \in D(f)\ \exists a,\ f(x) < a$;

б) $\forall a\ \exists x \in D(f),\ f(x) < a$?

3) Сформулируйте определение функции, которая не является ограниченной сверху.

33. Имеет ли предел при x, стремящемся к b, функция $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b} q(x) \quad \text{и} \quad \forall x,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant q(x)?$$

! Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличаются определения непрерывности и предела функции в точке?

2. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ имеет левый и правый пределы в точке b, то существует $\lim\limits_{x \to b} f(x)$?

3. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 9 пункта 1:

1) имеют предел в каждой точке;

2) имеют односторонний предел в каждой точке?

4. Найдите предел, если он существует:

1) $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x \leqslant 1, \\ 7x-5, & x > 1 \end{cases}$ при $x \to 1$;

2) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{|x+1|}$ при $x \to -1$.

3. Свойства пределов и асимптоты графика функции

Элементарная функция $y = \sin\frac{1}{x}$ (рис. 17) является непрерывной во всех точках, кроме нуля. Однако, чем ближе значение аргумента к нулю, тем чаще функция пробегает все свои значения, т. е. числа от -1 до 1. Значит, в нуле у этой функции нет ни двустороннего, ни односторонних пределов. Действительно, какое бы число ни исполняло роль y_0 из определения предела, при $\varepsilon = 0{,}5$ в любой, как угодно малой, δ-окрестности нуля найдётся значение $\sin\frac{1}{x}$, равное либо 1, либо -1, которое не будет удовлетворять неравенству $\left|\sin\frac{1}{x} - y_0\right| < 0{,}5$.

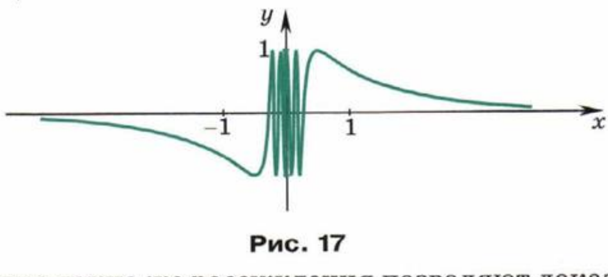


Рис. 17

Примерно такие же рассуждения позволяют доказать, что *функция не может иметь двух разных двусторонних пределов при x стремящемся к x_0.*

▼ Докажем это методом «от противного». Пусть при стремлении x к x_0 функция $y = f(x)$ имеет два различных предела a и b. Возьмём ε равным $\frac{|a-b|}{3}$. Тогда можно подобрать такое значение δ, что $f(x)$ окажется одновременно на расстоянии, меньшем ε и от a, и от b. Однако при указанном выборе ε это невозможно, так как $f(x)$ не может быть ближе и к a, и к b одновременно (рис. 18).

Это значит, что предположение о существовании двух пределов неверно. △

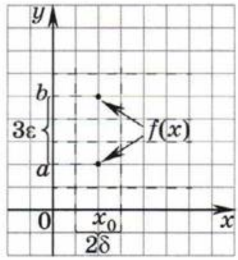


Рис. 18

Можно доказать свойства пределов суммы произведения и частного функций.

$$1)\ \lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x);$$

$$2)\ \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x);$$

$$3)\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

Должны, конечно, существовать пределы в правых частях равенств, а в третьем равенстве, кроме того, предел, стоящий в знаменателе, должен отличаться от нуля.

В дальнейшем эти свойства будут нужны, поэтому полезно запомнить их краткие формулировки.

Предел суммы [произведения, частного] равен сумме [произведению, частному] пределов.

Вернёмся к функции $y = \sin\frac{1}{x}$. При неограниченном удалении точек графика от оси ординат они приближаются к оси абсцисс, график как бы сливается с осью абсцисс, которая является его ***горизонтальной асимптотой***. Говорят, что функция $y=\sin\frac{1}{x}$ имеет предел, равный нулю, при x, *стремящемся к бесконечности*: $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$.

С помощью кванторов это можно записать иначе.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \text{ такое, что } |x| > a \Rightarrow \left|\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

В математике обозначение предела и сам термин «предел» иногда используют в ситуациях, когда функция не имеет предела. Так, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ означает, что при x, стремящемся к нулю, значения $\frac{1}{x}$ неограниченно возрастают по модулю, т. е. что $\left|\frac{1}{x}\right|$ становится (и остаётся) больше любого заданного числа: $\forall b\ \exists \delta$ такое, что $|x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > b$. Подобно этому, запись $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = +\infty$ говорит о неограниченном возрастании значений выражения x^2 при x, стремящемся к бесконечности[1]: $\forall b\ \exists a$ такое, что $|x| > a \Rightarrow x^2 > b$. Условие существования ***вертикальной асимптоты*** $x = a$ можно записать так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 + 4x^2 - 2x}$.

Решение. При x, стремящемся к бесконечности, и числитель, и знаменатель дроби неограниченно возрастают по модулю. Вообще говоря, эта ситуация неопределённая. Однако, разделив числитель и знаменатель на x^3, мы получим тождественно равное выражение $\dfrac{\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}}$, поведение которого при стремлении x к бесконечности понятно: каждая из трёх дробей в числителе при неограниченном увеличении модуля

[1] Символ бесконечности (∞) впервые использовал английский математик Джон Валлис в 1665 г. в работе «Арифметика бесконечного». Существует мнение, что знак бесконечности противопоставлялся автором нулю и представлял собой два связанных между собой нуля.

её знаменателя стремится к нулю, значит, и весь числитель стремится к нулю (предел суммы равен сумме пределов). По аналогичным соображениям, знаменатель стремится к числу 3. Вся дробь при этом стремится к нулю (предел частного равен частному пределов):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^3+4x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}=0.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+3}{3x^3+4x^2-2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+3}{3x^3+4x^2-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$.

Полученный ответ позволяет сделать вывод о том, что функция $y=\dfrac{2x^3-5x+3}{3x^3+4x^2-2x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y=\dfrac{2}{3}$.

По аналогии с горизонтальной асимптотой можно ввести и понятие *наклонной* асимптоты — прямой $y=kx+b$, с которой при неограниченном увеличении $|x|$ как бы сливается график функции $y=f(x)$.

> Прямая $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ называется ***наклонной асимптотой графика функции*** $y=f(x)$, если
> $$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(kx+b))=0.$$

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty$, то вертикальной асимптотой графика этой функции является прямая $x=-1$.

Для решения вопроса о горизонтальной асимптоте устремим x к бесконечности: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}=\infty$. Предела не существует, значит, у функции нет горизонтальных асимптот.

Нахождение наклонных асимптот несколько сложнее. Преобразуем сначала выражение $\frac{x^2}{x+1}$:

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = (x-1) + \frac{1}{x+1}.$$

Первое слагаемое задаёт линейную функцию, а второе при стремлении x к бесконечности стремится к нулю.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - (x-1)\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = 0$, значит, функция $y = \frac{x^2}{x+1}$ имеет наклонную асимптоту $y = x - 1$.

Информация об асимптотах позволяет более точно изобразить график функции (рис. 19).

Заметим, что на промежутке $(-1; +\infty)$ значения функции неотрицательны, поэтому в точке $x = 0$ функция принимает своё наименьшее на этом промежутке нулевое значение.

Нельзя, правда, пока определить координаты точки A, абсцисса которой разделяет промежутки возрастания и убывания функции — этому вы научитесь в следующих главах учебника.

Замечание. Графики некоторых функций могут иметь две наклонных асимптоты. Например, прямые $y = x$ и $y = -x$ — наклонные асимптоты графика функции $y = |x| + \frac{1}{x}$ (рис. 20).

Здесь $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x| + \frac{1}{x} - x\right) = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x| + \frac{1}{x} - (-x)\right) = 0$.

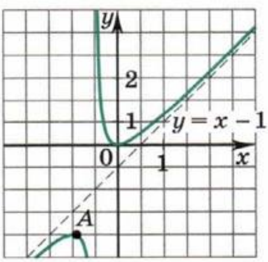


Рис. 19

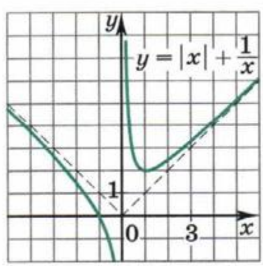


Рис. 20

Пример 4. Найти наклонные асимптоты графика функции $y = \frac{2x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x - 5}$.

Решение. Попытаемся, как и в предыдущем примере, выделить из данной дроби линейный двучлен. Здесь, однако, формулы сокращённого умножения нам помочь не смогут — придётся делить числитель дроби на её знаменатель в столбик. Алгоритм деления многочлена на многочлен очень похож на хорошо известное деление уголком одного натурального числа на другое:

$$\begin{array}{r|l} -\ 2x^3 - 7x^2 + 4x - 3 & x^2 - 4x - 5 \\ \cline{2-2} 2x^3 - 8x^2 - 10x & 2x + 1 \\ \cline{1-1} -\ x^2 + 14x - 3 & \\ x^2 - 4x - 5 & \\ \cline{1-1} 18x + 2 & \end{array}$$

Сначала мы подобрали одночлен $2x$ так, чтобы, умножив его на старший член делителя, получить старший член делимого $2x^3$. Затем под делимым подписали произведение делителя на этот одночлен и вычли из делимого это произведение. После вычитания от делимого остался трёхчлен $x^2 + 14x - 3$, для которого как для делимого описанную процедуру повторили: нашли одночлен 1, умножили на него делитель, подписали под делимым и вычли. В остатке получился двучлен $18x + 2$. На этом деление закончилось, так как нет одночлена, который в произведении с x^2 дал бы $18x$.

Итак, при делении $2x^3 - 7x^2 + 4x - 3$ на $x^2 - 4x - 5$ в частном получилось $2x + 1$, а в остатке $18x + 2$, значит,

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x - 5} = 2x + 1 + \frac{18x + 2}{x^2 - 4x - 5}.$$

Прямая $y = 2x + 1$ — наклонная асимптота графика функции $y = \frac{2x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x - 5}$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x - 5} - (2x + 1)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{18x + 2}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{18}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = 0. \triangle$$

Упражнения

34. Известно, что $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \frac{2}{3}$. Найдите:

1) $\lim\limits_{x \to 1} 0{,}3f(x)$;
2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{g(x)}{2}$;
3) $\lim\limits_{x \to 1} (f(x) + g(x))$;
4) $\lim\limits_{x \to 1} (f(x) \cdot g(x))$;
5) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$;
6) $\lim\limits_{x \to 1} (f(x))^3$.

35. 1) Докажите, что вблизи указанной точки значения функции неограниченно возрастают по модулю:

а) $y = \frac{1}{x-3}$ при $x \to 3$;
б) $y = \frac{x}{x^2}$ при $x \to 0$;
в) $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ при $x \to 1$;
г) $y = \frac{x^2+2x-3}{(x+3)^2}$ при $x \to -3$.

2) Запишите уравнения вертикальных асимптот графиков указанных функций.

36. Выберите условие, при котором:
1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$; 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
а) $\forall b\ \exists a$ такое, что $x < a \Rightarrow |f(x)| > b$;
б) $\forall \varepsilon > 0 \exists a$ такое, что $x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;
в) $\forall b\ \exists a$ такое, что $x > a \Rightarrow f(x) < b$;
г) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a$ такое, что $|x| > a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

37. Запишите с помощью кванторов, что:
1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$;
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

38. Приведите пример функции $y = f(x)$ такой, что:
1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$;
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

39. Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, если:

1) $f(x) = (5x-2)^{-1}$, $x_0 = \frac{2}{5}$;

2) $f(x) = (2x+3)^{-5}$, $x_0 = -1{,}5$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{(x-4)^4}$, $x_0 = 4$;

4) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x-1)^5}$, $x_0 = 1$.

40. 1) Найдите предел функции y при x, стремящемся к бесконечности:

а) $y = \dfrac{1}{6x}$;

б) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$;

в) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 3x - 1}$;

г) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}$.

2) Запишите уравнения горизонтальных асимптот графиков данных функций.

41. Найдите наклонные асимптоты графика функции:

1) $y = \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}$;

2) $y = \dfrac{2x^2 + 4x - 3}{x - 2}$;

3) $y = \dfrac{4x^3 - x^2 + 2}{x^2 - 1}$;

4) $y = \dfrac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$.

42. По рисунку 21, на котором изображены графики функций, ответьте на вопросы.

1) Какой из графиков имеет вертикальную; горизонтальную; наклонную асимптоты?

2) Какая из функций имеет предел при: $x \to a$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$?

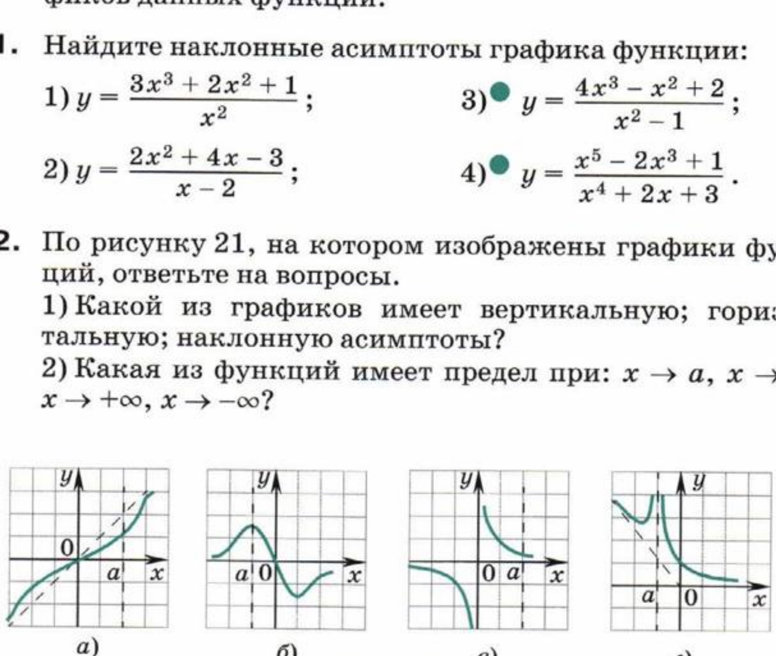


Рис. 21

43. Графики каких функций имеют: 1) вертикальную; 2) горизонтальную; 3) наклонную асимптоты:

а) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$;

б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

в) $y = \dfrac{3}{x + 3}$;

г) $y = \dfrac{2x}{x - 3}$;

д) $y = \dfrac{x^6 - 2x^3 + 4}{x^5 + x - 2}$;

е) $y = \dfrac{x^4 - 5}{3 - x^4}$?

Запишите уравнения асимптот графиков функций.

44. 1) Может ли график функции иметь горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$ и наклонную асимптоту при $x \to -\infty$?

2) Может ли график функции иметь:

а) две вертикальные и две наклонные асимптоты;

б) одну горизонтальную и две наклонные асимптоты;

в) три наклонные асимптоты?

Если может, сделайте его эскиз.

45. Закончите предложение:

1) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то график функции имеет...

2) Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, то график функции имеет...

3) Если $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$, то график функции имеет...

46. Запишите с помощью обозначения предела, что:

1) прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = g(x)$ в левой полуплоскости;

2) прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой графика в левой и в правой полуплоскостях;

3) прямая $x = 3$ является вертикальной асимптотой графика;

4) прямая $y = 3x - 1$ является наклонной асимптотой графика функции $y = g(x)$ в верхней и в нижней полуплоскостях.

47. Изобразите график какой-нибудь функции, для которой выполняется условие:

1) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$;

2) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$;

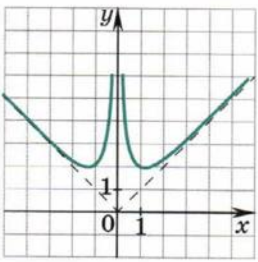
3) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$;

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$;

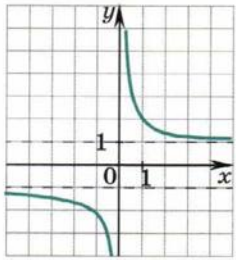
5) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (2x - 3)) = 0$;

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + (2 - x)) = 0$.

48. Задайте формулой функцию, график которой изображён на рисунке: 1) 22, *а*; 2) 22, *б*.



а)



б)

Рис. 22

49. Запишите с помощью обозначения предела:

1) $\forall\varepsilon > 0\ \exists a$ такое, что $x > a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

2) $\forall\varepsilon > 0\ \exists a$ такое, что $x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

3) $\forall b\ \exists a$ такое, что $x > a \Rightarrow f(x) > b$;

4) $\forall b\ \exists a$ такое, что $x < a \Rightarrow f(x) > b$;

5) $\forall b\ \exists M$ такое, что $|x| > M \Rightarrow |f(x)| > b$.

50. Что можно сказать о последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

если:

1) $\forall k, n \in \boldsymbol{N}, n > k \Rightarrow a_n > a_k$;

2) $\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \boldsymbol{N}\ \forall n \in \boldsymbol{N}, n > k \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$;

3) $\forall b\ \exists k \in \boldsymbol{N}$ такое, что $a_k > b$;

4) $\forall b\ \exists k \in \boldsymbol{N}\ \forall n \in \boldsymbol{N}, n > k \Rightarrow a_n > b$?

Укажите какую-нибудь последовательность, для которой одновременно выполняются условия 1 и 2.

51. Найдите сумму S геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots$ со знаменателем q при $|q| < 1$ как предел, к которому стремится сумма S_n первых n её членов при n, стремящемся к бесконечности: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры использования обозначения предела, когда предел не существует.

2. Может ли график функции иметь и горизонтальную, и наклонную асимптоты?

3. Докажите, что прямая $y = 3x + 2$ является наклонной асимптотой графика функции

$$y = \frac{3x^3 + 5x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

? Вопросы для самооценки

1. Оцените результаты изучения этой главы. Довольны ли вы ими?

2. Что нового вы узнали в этой главе?

3. Как могут пригодиться вам эти знания в повседневной жизни?

4. Какие задания в этой главе были для вас самыми трудными? Почему?

5. Использовали ли вы при выполнении заданий дополнительные источники: справочники, пособия, интернет-ресурсы?

6. Обращались ли вы за помощью к одноклассникам, родителям, учителю?

7. Проверяли ли вы свои знания и умения по контрольным вопросам и заданиям к пункту?

8. Пользовались ли вы разделами «Ответы», «Советы» и «Решения», предметным указателем?

Глава 2

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Эта глава познакомит вас с возможностями, которые предоставляет для исследования функции знание углового коэффициента касательной к её графику. В пункте 4 вы научитесь проводить касательные к графикам функций и записывать их уравнения. В пункте 5 угловой коэффициент касательной получит своё классическое название — производная, и станет понятно, почему производную называют скоростью изменения функции. В пункте 6 производная поможет находить промежутки возрастания и убывания функций.

4. Касательная к графику функции

На рисунке 23 к полуокружности радиусом 2 с центром в начале координат, представляющей собой график функции $y = \sqrt{4 - x^2}$, проведена касательная. В курсе геометрии *касательная* к окружности обычно определяется как *прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку*. Однако для полуокружности такое определение касательной уже не подходит. Действительно, через точку M_0 можно провести бесконечно много прямых, имеющих с ней единственную общую точку (рис. 24).

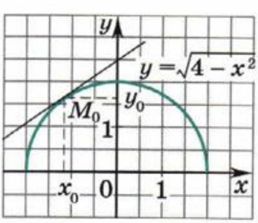


Рис. 23

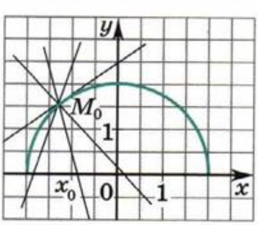


Рис. 24

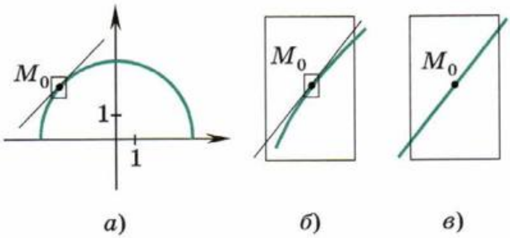


Рис. 25

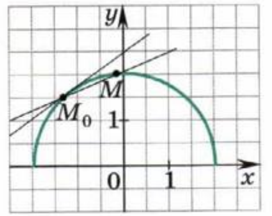


Рис. 26

Сформулируем определение касательной так, чтобы оно годилось не только для окружности и полуокружности, но и вообще для произвольной кривой.

При последовательном увеличении масштаба изображения (рис. 25), видно, что вблизи своей точки M_0 график функции как бы *спрямляется*, сливается с касательной. Значит, с касательной сливается и секущая M_0M в знакомом вам из предыдущей главы процессе сближения точки $M(x;\ y)$ с точкой M_0 (рис. 26).

> Касательная к кривой в её точке M_0 — это ***предельное положение секущей*** M_0M, когда M стремится к M_0.

Понятно, что касательная к кривой не существует в точках её разрыва, так как точка M не стремится к точке M_0 при $x \to x_0$ (рис. 27). Отсюда, в частности, следует, что если касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ существует, то функция непрерывна в точке x_0. Однако обратное утверждение неверно. На рисунке 28 изображён график функции, непрерывной в точке x_0, но не имеющий касатель-

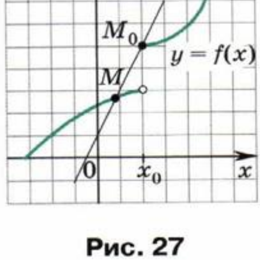


Рис. 27

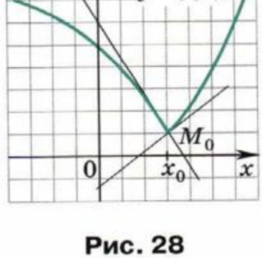


Рис. 28

ной в точке M_0, — предельное положение секущей при стремлении точки M к M_0 слева и справа оказывается различным.

Всё же в подавляющем большинстве точек графики элементарных функций имеют касательные и благополучно *спрямляются* вблизи них.

Работать с прямыми значительно легче, ведь они являются графиками самых простых — линейных — функций. Возможность заменять на маленьких промежутках произвольные функции линейными независимо друг от друга открыли в середине XVII в. И. Ньютон и Г. В. Лейбниц. Это открытие легло в основу нового раздела математики — «Математического анализа»[1].

Рассмотрим, как получить ***уравнение касательной к графику функции***.

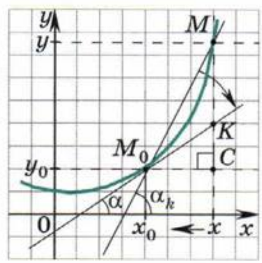


Рис. 29

На рисунке 29 изображён график некоторой функции $y = f(x)$, имеющий в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ касательную M_0K. В соответствии с определением, при приближении точки M к точке M_0 секущая MM_0, поворачиваясь вокруг точки M_0, стремится слиться с касательной M_0K.

Стремление точки M к M_0 обеспечивается стремлением её абсциссы x к x_0, абсциссе точки M_0.

Чтобы получить уравнение прямой M_0K: $y = k(x - x_0) + y_0$, нужно найти её *угловой коэффициент* k, равный тангенсу угла α наклона этой прямой[2]. К этому углу стремится α_k — угол наклона секущей MM_0: $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_k = \alpha$.

---

[1] Статья Г. В. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый для этого род исчисления», опубликованная в математическом журнале в 1684 г., состояла всего лишь из шести страниц и была первой работой по изложению метода исчисления бесконечно малых. Основным понятием у Лейбница, как и в нашем учебнике, являлось понятие касательной.

[2] Это не относится к касательным, которые перпендикулярны оси абсцисс. Они не являются графиками линейных функций $y = kx + l$, а задаются уравнениями вида $x = a$.

Тангенс угла наклона секущей можно выразить из прямоугольного треугольника M_0CM, в котором $M_0C = x - x_0$ и $MC = y - y_0$: $\operatorname{tg} \alpha_k = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Таким образом, $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} \alpha_k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Пример 1. Найти уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение.

1. Найдём ординату точки касания: $y_0 = 1^2 = 1$.

2. Найдём разность $y - y_0$: $y - y_0 = x^2 - 1$.

3. Найдём угловой коэффициент касательной:

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

4. Напишем уравнение касательной: $y = k(x - x_0) + y_0$, $y = 2(x - 1) + 1$.

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим ответ: $y = 2x - 1$.

Замечание. Эту задачу можно решить и более привычным способом, заметив, что касательная к параболе имеет с ней *единственную* общую точку (рис. 30). Тогда коэффициент k вычисляется как значение параметра k, при котором квадратное уравнение $x^2 = k(x - 1) + 1$ имеет единственный корень, т. е. при котором его дискриминант равен нулю.

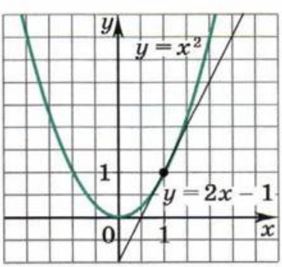


Рис. 30

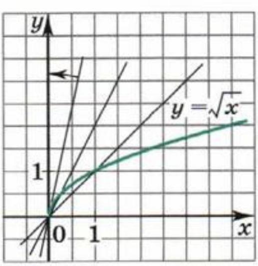


Рис. 31

$$x^2 = k(x-1)+1,\ x^2 - kx + (k-1) = 0.$$

$$D = 0:\ k^2 - 4(k-1) = 0,\ k^2 - 4k + 4 = 0,\ (k-2)^2 = 0,\ k = 2.$$

Пример 2. Найти уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Поскольку x_0 является левой границей области определения, точка M может приближаться к точке M_0 только справа (рис. 31), а значит, искать нужно правый предел:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Предел не существует, однако ясно, что угол наклона секущей MM_0 стремится к $90°$. При этом касательная или параллельна оси ординат, или, как в нашем случае, совпадает с ней.

Ответ: уравнение касательной $x = 0$.

Упражнения

52. Найдите приближённо тангенс угла наклона касательной к графику функции в отмеченных точках (рис. 32).

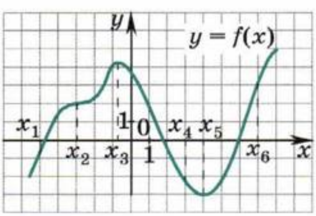


Рис. 32

53. В каких точках касательные к графику функции (рис. 33) параллельны:
1) оси абсцисс;
2) прямой $y = x$;
3) прямой $y = -x$?

54. В каких точках не существует касательной к графику функции (рис. 34)?

55. Постройте график функции $y = x^2$.
1) Отметьте на графике точки M_0, M_1, M_2, M_3 с абсциссами $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
2) Найдите угловые коэффициенты секущих:
а) M_0M_3; б) M_0M_2; в) M_0M_1.

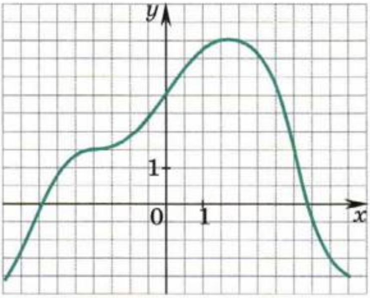


Рис. 33

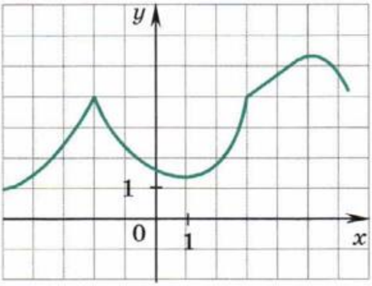


Рис. 34

3) Найдите угловой коэффициент касательной в точке M_0 как предел.

56. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$.

57. 1) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в его точке с абсциссой:

а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = 2$.

2)○ Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 3$ в точке с ординатой:

а) $y_0 = 0$; б) $y_0 = 1$; в) $y_0 = -3$.

58. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = 2x^2 - x + 3$, проходящих через его точку:

1) $A(-1; 6)$; 2) $D(0; 3)$.

59.○ Найдите координаты точки графика функции y, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен k:

1) $y = x^2 - 11x + 1$, $k = 1$; 2) $y = x^2 + 5x - 6$, $k = -1$.

60.● Найдите угол между касательными, проведёнными к графикам функций $y = 2x^2 - 3$ и $y = 2x^2 - x + 3$ в точке их пересечения.

61.● К графику функции $y = 2x^2 - x + 3$ составьте уравнение касательной, проходящей параллельно:

1) оси абсцисс;

2) прямой $y = x + 2$;

3) прямой $y = -2x + 5$.

62. К графику функции $y = x^2 + 2x + 1$ составьте уравнение касательной, перпендикулярной прямой:

1) $2y + x - 3 = 0$; 2) $6y - x + 11 = 0$.

63. Найдите геометрическое место таких точек M, из которых можно провести к параболе $y = x^2$ две взаимно перпендикулярные касательные.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что функция непрерывна в точке, где к её графику проведена касательная.
2. Верно ли, что в любой точке, где функция непрерывна, к её графику можно провести касательную?
3. Постройте график функции $y = \sin x$. Сколько существует касательных к этому графику, параллельных оси абсцисс? Укажите абсциссы точек, в которых касательные к этому графику имеют положительные угловые коэффициенты.

5. Производная и дифференциал функции

Выражение $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ позволяет находить угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в произвольной точке x_0. Обычно используется специальное обозначение: $x - x_0 = \Delta x$ (читается: *«дельта икс»*). В русском языке для величины, на которую изменилось начальное количество, используется слово «прирост». Поскольку Δx показывает, на сколько изменилось начальное значение аргумента x_0: $x = x_0 + \Delta x$, Δx называют ***приращением аргумента***.

Приращению аргумента соответствует ***приращение функции***, которое также обозначается с помощью заглавной греческой буквы Δ[1]:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f.$$

[1] Букву «Δ» для обозначения приращений переменных в середине XVIII в. стал использовать Л. Эйлер.

С новыми обозначениями получаем:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

При x, стремящемся к x_0, их разность Δx стремится к нулю, и k можно найти как предел:

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

С этого предела и началась в XVII в. новая эпоха в развитии математики.

Предел частного приращений функции и аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется ***производной функции***.

Производная функции y обозначается y' (читается: *«игрек штрих»*). Так, значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 записывается, как $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

▼ Если x_0 является левой или правой границей области определения функции, говорят соответственно о правой или левой производной. Так, в левой границе Δx стремится к нулю справа, а значит, производная равна правому пределу: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Аналогично, левая производная: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Специального обозначения для односторонних производных нет, просто следует помнить, что на границе области определения функция может иметь только одностороннюю производную (но может и не иметь, как рассмотренная в примере 2 предыдущего пункта функция $y=\sqrt{x}$). △

Производная $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ в её произвольной точке x (теперь можно отказаться от использования обозначения x_0) сама является функцией аргумента x:

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

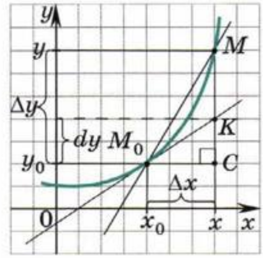


Рис. 35

На рисунке 35 касательная делит отрезок CM на две части. Одну из них, CK, которая показывает, как изменилась ордината точки касательной, т. е. приращение соответствующей линейной функции, называют ***дифференциалом***[1].

Говорят, что *дифференциал функции* $y = f(x)$ — это линейная часть её приращения, и обозначают его dy или df.

Вблизи точки касания график функции как бы сливается с касательной, а значит, приращение функции практически не отличается от её дифференциала, т. е. относительная погрешность замены Δy на dy близка к нулю. Это позволяет достаточно точно вычислять приращения функции, соответствующие малым приращениям аргумента: $\Delta y \approx dy = k\Delta x$, где k — угловой коэффициент касательной M_0K.

Касательная к графику функции $y = x$ совпадает с графиком самой функции, значит, для неё верно равенство

$$\Delta x = dx.$$

Поскольку дифференциалы функции и аргумента представляют катеты прямоугольного треугольника M_0CK (см. рис. 35), можно через них выразить угловой коэффициент касательной: $k = \frac{dy}{dx}$, производную функции $y = f(x)$: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Поскольку $f'(x) = \frac{df}{dx}$, отношение дифференциалов также иногда используют для обозначения производной.

Процесс нахождения производной называют ***дифференцированием***, а функцию, которая имеет производную в любой точке области определения, называют ***дифференцируемой***.

[1] Приращение абсциссы, «бесконечно малую» разность $x_2 - x_1$, Лейбниц обозначил через dx (d — первая буква в латинском слове diferentia — «разность»), соответствующее приращение функции $y_2 - y_1$ — через dy. Для производной он не ввёл специального обозначения и записывал её как частное дифференциалов. Обозначения y' и $f'(x)$ для производной ввёл Лагранж. Сам термин «производная» (перевод французского слова derivée) впервые встретился у француза Луи Арбогаста в его книге «Вычисление производных», опубликованной в Париже в 1800 г.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^3 - 3x + 3$.

Решение.

(1) $\Delta y = ((x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) + 3) - (x^3 - 3x + 3) =$

$$= ((x + \Delta x)^3 - x^3) - 3\Delta x =$$
$$= (x + \Delta x - x)((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2) - 3\Delta x =$$
$$= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\Delta x = \Delta x(3x^2 + \Delta x(3x + \Delta x) - 3);$$

(2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(3x^2 + \Delta x(3x + \Delta x) - 3)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + \Delta x(3x + \Delta x) - 3) = 3x^2 - 3.$$

Ответ: $y' = 3x^2 - 3$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой x_0:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Пример 2. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение. Абсцисса указанной точки графика: $x_0 = 0$. В уравнение касательной входят ещё $f(x_0)$ — ордината точки касания и $f'(x_0)$ — значение, которое принимает производная в точке x_0: $f(x_0) = f(0) = 3$; $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x_0) = f'(0) = -3$.

Теперь можно записать уравнение искомой касательной: $y = -3x + 3$.

Ответ: $y = -3x + 3$.

Пример 3. Найти приближённое значение функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$ при $x = 1{,}99$.

Решение. Из того, что $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ и

$\Delta f \approx df = f'(x) \cdot \Delta x$, получаем:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Представим 1,99 как 2 – 0,01 и подставим в полученную формулу $x_0 = 2$ и $\Delta x = -0{,}01$:

$f(1{,}99) = f(2 - 0{,}01) \approx f(2) + f'(2) \cdot (-0{,}01)$.

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 3 = 5$; $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$.

$f(1{,}99) \approx 5 + 9 \cdot (-0{,}01) = 5 - 0{,}09 = 4{,}91$.

Ответ: 4,91.

Примечание. Чем меньше Δx, тем точнее приближение. В этом примере точное значение $f(1{,}99)$ равно 4,910599.

К понятию производной можно подойти, рассматривая физическую задачу.

Материальная точка M движется по прямой, на которой выбрано начало отсчёта — точка O. Расстояние от начала отсчёта до точки M в каждый момент времени t обозначим буквой s. Тогда движение точки M будет описываться функцией $s = s(t)$ (рис. 36).

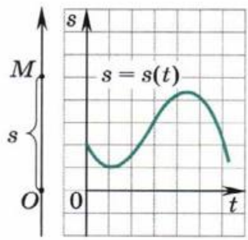


Рис. 36

Найдём $v(t)$ — скорость точки M в момент времени t. Мгновенная скорость, как вы знаете из курса физики, приближённо равна средней скорости точки за очень маленький временной интервал, т. е. $v(t) \approx \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$. Погрешность этого приближения стремится к нулю при неограниченном уменьшении продолжительности рассматриваемого временного интервала, значит, $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Скорость изменения расстояния оказалась равна его производной: $v(t) = s'(t)$.

Переносся физический смысл производной расстояния на произвольные функции, часто говорят, что ***производная есть скорость изменения функции***[1].

[1] Знаменитый английский учёный И. Ньютон (1643—1727) пришёл к понятию производной от задач механики, поэтому для него основным понятием была скорость, а не касательная, как у Лейбница. Свои результаты в этой области он изложил в трактате «Метод флюксий и бесконечных рядов», который был опубликован уже после его смерти, в 1736 г. Однако открыл свой метод флюксий, тех же самых производных, Ньютон ещё в середине 60-х гг. XVII в., когда 20-летний Лейбниц был студентом юридического факультета и математикой ещё не занимался. Два учёных из разных стран независимо друг от друга пришли к понятию производной, Ньютон, решая задачи физики, Лейбниц — задачи геометрии.

Пример 4. Через сколько секунд после начала движения по прямой материальная точка остановится, если расстояние от неё до некоторой точки этой прямой изменяется по закону $s = t^2 - 8t + 10$ (м), где t — время движения в секундах?

Решение. В момент остановки скорость точки равна нулю. Значит, нужно найти скорость как производную функции $s(t)$ и приравнять её к нулю.

1) $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) =$
$= (t + \Delta t)^2 - 8(t + \Delta t) + 10 - (t^2 - 8t + 10) = \Delta t(2t - 8 + \Delta t);$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(2t - 8 + \Delta t)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} (2t - 8 + \Delta t) = 2t - 8.$$

2) $v(t) = 0$: $2t - 8 = 0$, $t = 4$.

Ответ: материальная точка остановится через 4 с после начала движения.

Упражнения

64. В каких точках производная функции, график которой изображен: 1) на рисунке 37; 2) на рисунке 38; 3) на рисунке 39; 4) на рисунке 40:
а) не существует; б) принимает значение, равное нулю?

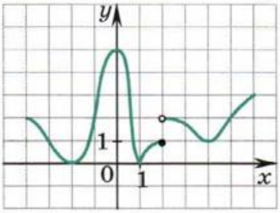


Рис. 37

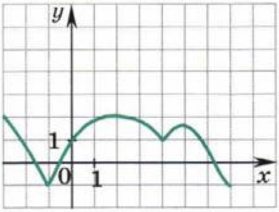


Рис. 38

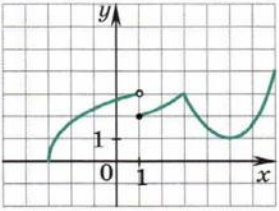


Рис. 39

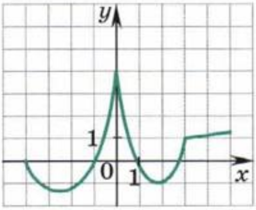


Рис. 40

На каких промежутках её значения положительны, а на каких — отрицательны?

65. Функция $y = g(x)$ задана своим графиком (рис. 41). Сравните значения производной:
1) $g'(1{,}5)$ и $g'(-2)$;
2) $g'(-2)$ и $g'(-1)$;
3) $g'(-1)$ и $g'(2)$;
4) $g'(-1)$ и $g'(0)$.

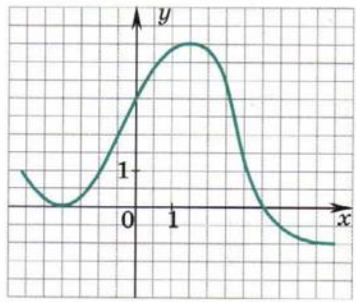


Рис. 41

66. По графикам функций (рис. 42) определите:
1) на каких промежутках производная функции:
а) положительна; б) отрицательна;
2) производная какой из этих функций обращается в нуль и в какой точке.

67. Используя графические соображения, найдите:
1) производную постоянной ($y = C$);
2) производную линейной функции ($y = kx + b$).

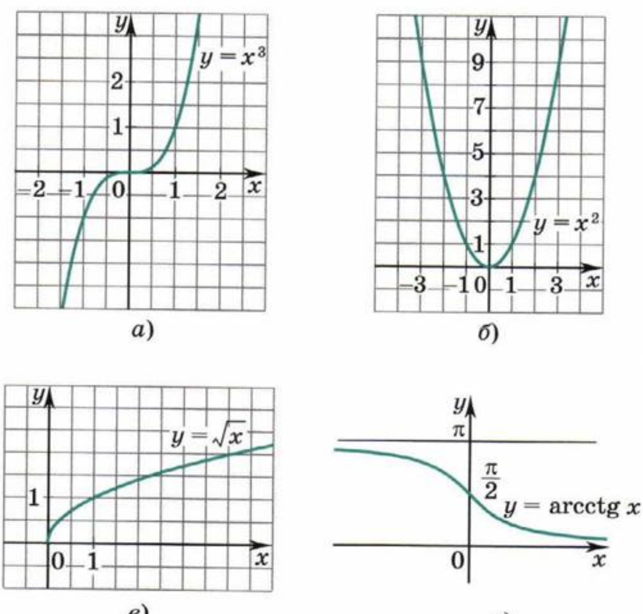
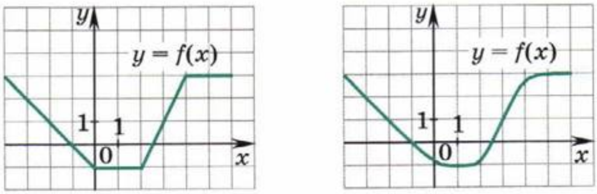


Рис. 42



а) *б)*

Рис. 43

68.● Верно ли утверждение: «Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, график которой имеет горизонтальную асимптоту в левой и правой полуплоскостях, то существует $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$»?

69.● Скопируйте в свою тетрадь график функции, изображённый: 1) на рисунке 43, *а*; 2) на рисунке 43, *б*. В той же системе координат изобразите схематически график производной этой функции.

70.● Докажите, что:

1) производная чётной дифференцируемой функции, отличной от $y = 0$, является нечётной функцией;

2) нечётная дифференцируемая функция имеет чётную производную.

71. Найдите Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции:

1) $y = x^2$, если: а) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$; б) $x = 2{,}5$, $\Delta x = 1{,}5$;

2) $y = \dfrac{1}{x}$, если: а) $x = 3$, $\Delta x = 0{,}01$; б) $x = 2$, $\Delta x = -0{,}1$.

72. Пользуясь определением, найдите производную функцию:

1)○ $y = x^2$; 3)○ $y = \dfrac{1}{x}$; 5)● $y = \dfrac{x}{x-1}$;

2)○ $y = x^3$; 4)● $y = \sqrt{x}$; 6)● $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

73. Докажите, что функция $f(x)$ является производной функции $g(x)$:

1)○ $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$;

2)● $f(x) = 6x^2 - 6x$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

При решении упражнений 74—85 используйте результаты упражнений 72 и 73.

74. При каких значениях x выполняется условие:

1) $f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$, если $f(x) = x^2 - 4x + 6$;

2) $f'(x) > 5$, если $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$?

75. Найдите значение производной функции $f(x)$ и запишите уравнение касательной к графику этой функции в его точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 6$: а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = 2$;

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$: а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = 2$.

76. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, которая проходит через точку A, если:

1) $y = x^2 - 4x + 6$, $A(2; 2)$;

2) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$, $A(1; 1)$;

3) $y = \frac{1}{x}$, $A(-1; -1)$;

4) $y = \sqrt{x}$, $A(4; 2)$.

77. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $y = x^2 - 4x + 6$:

а) параллельной оси абсцисс;

б) в точке его пересечения с осью ординат;

2) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$:

а) параллельной прямой $y = 12x + 1$;

б) в точке пересечения с осью ординат.

78. К графику функции $y = x^2 - 4x + 6$ напишите уравнение касательной, перпендикулярной прямой:

1) $x = 5$;

2) $y = x$;

3) $y = -x$;

4) $y = 2x + 3$.

79. Найдите приближённое значение функции:

1) $f(x) = x^2$ при $x = 2{,}01$;

2) $f(x) = x^3$ при $x = 2{,}83$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x = 1{,}97$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$ при $x = 4{,}03$.

80. Тело движется по закону $s(t) = t^2 - 4t + 6$. Найдите:

1) среднюю скорость движения тела $\left(v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ в промежутке времени:

а) $[0; 1]$; б) $[2; 5]$; в) $[t_1; t_2]$;

2) мгновенную скорость движения тела ($v(t) = s'(t)$) при:
а) $t = 1$; б) $t = 5$; в) $t = t_0$;

3) ускорение тела $\left(a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)\right)$.

81. Тело движется по прямой так, что расстояние s (м) до него от некоторой точки этой прямой изменяется по закону $s(t) = t^2 - 4t + 6$ (м), где t (с) — время движения. Найдите:

1) скорость тела через 3 с после начала движения;

2) в какой момент скорость тела равна 16 м/с;

3) в какой момент расстояние от тела до точки отсчёта будет наименьшим;

4) в какой момент тело остановится ($v = 0$).

82. Тело движется по прямой так, что расстояние s (м) от начала отсчёта изменяется по закону $s(t) = t^3 - 3t + 3$ (м), где t (с) — время движения. Найдите:

1) через сколько секунд после начала движения тело остановится;

2) в какой момент скорость тела станет равной 9 м/с;

3) каково наименьшее расстояние от тела до точки отсчёта;

4) в какой момент ускорение тела станет равным 18 м/с^2.

83. Количество электричества q (Кл), протекающего через некоторый проводник, задаётся формулой $q(t) = t^2 - 4t + 6$, где t (с) — время. Найдите силу тока ($I = q'(t)$) в момент времени $t = 2$ с.

84. Закон изменения температуры T (°C) тела в зависимости от времени t (с) задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 10$ с?

85. Сила тока I (А) изменяется в зависимости от времени t (с) по закону $I = 0{,}4t^2$. Найдите скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

86. Вычислите приближённо площадь S (см^2) круглой пластинки, радиус 3 см которой после её охлаждения уменьшился на 0,02 см.

87. Тело, масса которого $m = 0{,}5$ кг, движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 - 2t + 3$ (м), где t (с) — время движения в секундах. Найдите кинетическую энергию тела через 7 с после начала движения.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, почему равенство приращения аргумента функции $y = x$ и её дифференциала является точным.
2. Почему производную называют скоростью изменения функции?
3. Изобразите график какой-нибудь непрерывной функции, которая не имеет производной в точке $x = 1$.
4. Найдите по определению производную функции

$$f(x) = 3x^2 - 2x.$$

6. Точки возрастания, убывания и экстремума функции

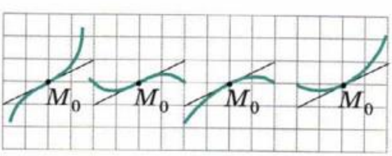
Угловой коэффициент $k = f'(x_0)$ касательной к графику функции $y = f(x)$ позволяет сделать вывод о том, как ведёт себя функция вблизи точки касания $M_0(x_0; y_0)$.

На рисунке 44 схематически изображены случаи, соответствующие положительному значению $f'(x_0)$. На рисунке 45 значение $f'(x_0)$ отрицательно.

Поскольку график функции в ближайшей окрестности точки касания сливается с касательной, можно заметить, что для точек этой окрестности:

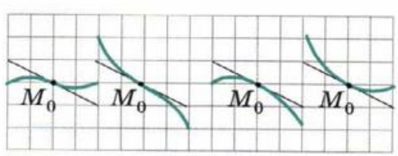
1) при $f'(x_0) > 0$ (см. рис. 44) точки графика слева от точки касания расположены ниже, а справа — выше этой точ-ки;

2) при $f'(x_0) < 0$ (см. рис. 45) точки графика слева от точки касания расположены выше, а справа — ниже этой точки.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 44



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 45

Если слева от точки x_0 значения функции меньше, а справа — больше, чем значение функции в самой точке x_0, то x_0 называют ***точкой возрастания***.
Если слева от точки x_0 значения функции больше, а справа — меньше, чем значение функции в самой точке x_0, то x_0 называют ***точкой убывания***.

Когда x_0 — точка возрастания, в некоторой её окрестности разности $x - x_0$ и $f(x) - f(x_0)$ одинаковы по знаку, а когда убывает, различны по знаку.

▼ Используя кванторы, это можно записать так:

$$\exists\delta > 0 \text{ такое, что } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0.$$

Для точки убывания x_0 соответственно:

$$\exists\delta > 0 \text{ такое, что } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0. \ \triangle$$

З а м е ч а н и е. Когда речь идёт об элементарных функциях, то точка возрастания принадлежит некоторому промежутку возрастания функции, а у произвольной функции такого промежутка может не оказаться. Так, например, $x = 0$ — точка возрастания функции

$$y = \begin{cases} x + x^2 \sin \dfrac{5}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$$

которая при стремлении аргумента функции к нулю *бесконечно колеблется* между функциями $y = x - x^2$ и $y = x + x^2$ (рис. 46). Однако как угодно близко к нулю есть промежутки, на которых функция убывает.

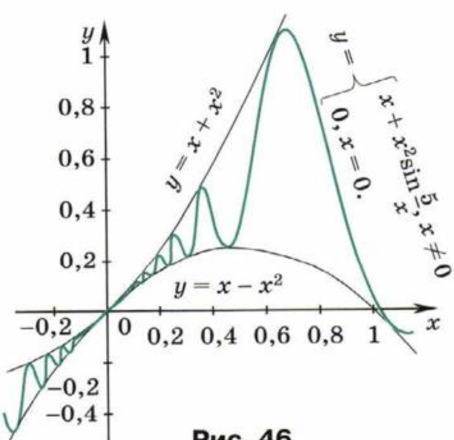


Рис. 46

Для промежутков возрастания или убывания функций (промежутков монотонности) понятно, что любая внутренняя точка промежутка возрастания [убывания] является точкой возрастания [убывания] функции.

Отысканию промежутков монотонности помогает условие возрастания [убывания] функции.

Если во всех точках некоторого промежутка производная функции положительна [отрицательна], то на этом промежутке функция ***возрастает*** [***убывает***].

Это утверждение является достаточным[1] условием возрастания [убывания] функции.

Доказать его можно с помощью *теоремы Лагранжа*[2].

Теорема Лагранжа

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную в каждой его внутренней точке, то на интервале $(a; b)$ существует точка x_0 такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Проиллюстрируем теорему Лагранжа графически.

Касательная к графику функции в точке M_0, (рис. 47) наиболее удалённой от секущей AB, параллельна этой секущей. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — это угловой коэффициент секущей. Иначе слева или справа от точки M_0 нашлись бы точки графика, отстоящие от секущей AB дальше, чем M_0.

Если, как сказано в условии возрастания функции, её производная положительна во всех точках некоторого промежутка, то для любых двух неравных значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

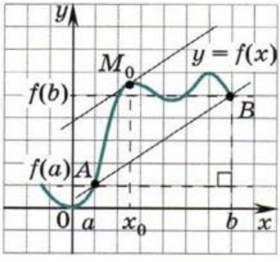


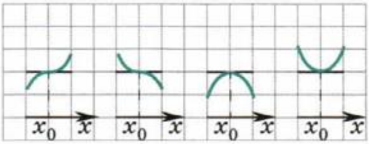
Рис. 47

[1] Условие не является необходимым, так как функция может возрастать на промежутке и, например, не иметь производной в некоторых его точках.

[2] *Жозеф Лагранж* (1736—1813) — знаменитый французский математик, внёсший большой вклад в развитие математического анализа. Родился в семье обедневшего чиновника. Математику изучал самостоятельно, и уже в 19 лет стал профессором математики в Артиллерийской школе Турина. Позднее он стал преемником Эйлера в Берлинской академии. Как уже отмечалось раньше, именно он предложил использовать штрих для обозначения производной.

Значит, большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. функция возрастает. Аналогично доказывается убывание функции на промежутке, где производная отрицательна.

Рассмотрим теперь, как выглядит график функции вблизи точки, в которой касательная к нему параллельна оси абсцисс.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 48

На рисунке 48, *а* значения функции слева от x_0 меньше, а справа — больше, чем $f(x_0)$. Значит, x_0 — точка возрастания.

На рисунке 48, *б* x_0 — точка убывания.

На рисунке 48, *в* и слева, и справа от x_0 значения функции не больше, чем $f(x_0)$, а на рисунке 48, *г* — не меньше, чем $f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой ***максимума*** [***минимума***] функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0, для всех x из которой $f(x) \leqslant f(x_0)$ [$f(x) \geqslant f(x_0)$].

▼ Условие максимума [минимума] функции $f(x)$ можно записать с помощью кванторов:

$$\exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0) \; [f(x) \geqslant f(x_0)]. \; \triangle$$

Значение функции в точке минимума называют *минимумом*, а значение в точке максимума — *максимумом* функции и обозначают $f_{\min}$ и $f_{\max}$ соответственно.

Максимум и минимум функции объединяются термином «экстремум».

Функция имеет ***экстремум*** в точке, если в этой точке у неё максимум или минимум.

Точка экстремума не является ни точкой возрастания, ни точкой убывания, значит, в ней производная функции не может принимать ни положительного, ни отрицательного значения, т. е. в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

Внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует, называется ***критической***.

▼ Когда производная равна нулю, график функции вблизи точки касания как бы сливается с графиком постоянной функции $y = f(x_0)$, поэтому критические точки, в которых производная обращается в нуль, иногда называют ***стационарными*** (от лат. stationaris — неподвижный). △

Понятно, что если слева от точки экстремума функция возрастает, а справа убывает, то в этой точке функция имеет максимум (см. рис. 48, *в*), если же при переходе через эту точку убывание сменяется на возрастание (см. рис. 48, *г*), то экстремум является минимумом.

Основываясь на достаточном условии возрастания [убывания], получим достаточные условия максимума и минимума функции.

> Если при переходе через критическую точку производная непрерывной функции изменяет знак с «плюса» на «минус» [с «минуса» на« плюс»], то это ***точка максимума* [*минимума*]**.

▼ Достаточно, конечно, говорить о непрерывности функции в самой критической точке. А вот разрыв функции в критической точке не позволяет гарантировать наличие в ней экстремума (рис. 49). △

Пример 1. Найти точки экстремума и промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

Решение. Производная $f'(x) = 3x^2 - 3$ данной функции была найдена в примере 1 предыдущего пункта.

Найдём точки, в которых $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

$f'(x) = 0$: $3x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$ или $x_2 = 1$ (рис. 50).

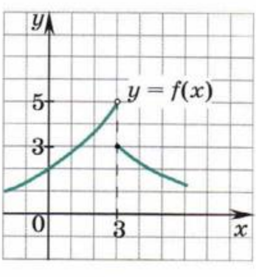


Рис. 49

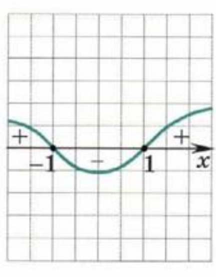


Рис. 50

На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ производная функции положительна, а на интервале $(-1; 1)$ отрицательна.

При переходе через критическую точку $x = -1$ производная меняет знак с «плюса» на «минус», значит, в силу непрерывности функции, $x = -1$ — точка максимума.

При переходе через критическую точку $x = 1$ производная меняет знак с «минуса» на «плюс», значит, $x = 1$ — точка минимума.

На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, так как на них её производная положительна, $f(-1)$ — наибольшее значение функции на промежутке $(-\infty; -1]$, во внутренних точках которого функция возрастает, значит, она возрастает на всём этом промежутке.

Поскольку $f(1)$ — наименьшее значение функции на промежутке $[1; +\infty)$, то функция и на этом промежутке возрастает.

Аналогичным образом, присоединяя точки -1 и 1 к интервалу убывания $(-1; 1)$, получаем промежуток убывания функции $[-1; 1]$.

О т в е т: точки экстремума функции: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 1$; функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, а убывает на отрезке $[-1; 1]$.

Информация о промежутках монотонности и точках экстремума помогает при изображении графика функции.

✓ **Пример 2.** Построить схематический график функции

$$y = x^3 - 3x + 3.$$

Р е ш е н и е. В предыдущем примере были найдены промежутки монотонности и точки экстремума данной функции. Однако для построения даже схематического графика нужно знать не только абсциссы, но и ординаты некоторых его точек.

Необходимо найти значения функции в точках экстремума, т. е. сами экстремумы функции.

Максимум: $y_{\max} = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$;

минимум: $y_{\min} = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$.

Полезно найти координаты ещё некоторых точек графика.

Проще всего найти точку пересечения графика с осью ординат: $(0; 3)$.

Найдём, кроме того, значения функции в точках -2 и 2:

$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 3 = 1, \quad y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 3 = 5.$

При заполнении таблиц будем использовать следующие условные обозначения для характера изменения функции.

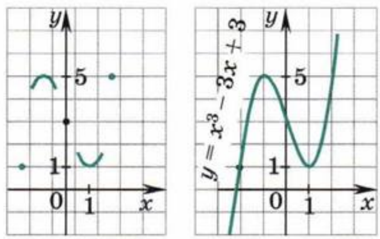
x	$(-\infty; -1]$	-1	$[-1; 1]$	1	$[1; +\infty)$	0	-2	2
Характер изменения и значения $f(x)$	↗	$\overset{\frown}{5}$	↘	$\underset{\smile}{1}$	↗	3	1	5

↗ — функция возрастает, ↘ — функция убывает,
⌒ — функция имеет максимум в данной точке,
◡ — функция имеет минимум в данной точке,
∼ — функция имеет перегиб в данной точке.

Для построения графика следует ещё выяснить, как ведёт себя функция при $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

асимптот нет.



а) *б)*

Рис. 51

Отметив на координатной плоскости найденные точки графика, проводим через них кривую, учитывая характер изменения функции на различных промежутках (рис. 51).

Пример 3. Изобразить график какой-нибудь функции $y = f(x)$, зная, что:

а) функция определена на интервале $(-4; 3)$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4)$;

в) $f'(x) < 0$ для любого x из интервала $(-4; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из интервалов $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$;

г) нули функции $x = -1$ и $x = 2$.

Решение. Заметим, что функция непрерывна, так как имеет производную в каждой точке своей области определения. На интервале $(-4; 0)$ функция убывает, а на интервалах $(0; 2)$ и $(2; 3)$ — возрастает.

При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «минуса» на «плюс», значит, функция имеет в этой точке минимум. При переходе через точку $x = 2$ производная знак не меняет — график функции в окрестности этой точки выглядит так, как на рисунке 48, *а*.

Поскольку непрерывная функция $y = f(x)$ имеет единственный экстремум — минимум, он совпадает с $\min f(x)$ — наименьшим значением функции.

Как следует из данной в условии области значений, $\min f(x) = y_{\min} = f(0) = -3$.

Занесём данную в условии информацию в таблицу.

x	$(-4; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; 3)$	-1
Характер изменения и значения $f(x)$	↘	-3	↗	0	↗	0

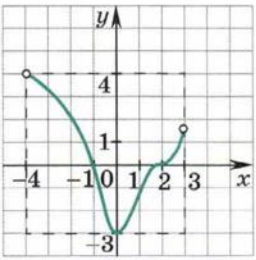


Рис. 52

При построении графика нужно учесть, во-первых, что в точке $x = 2$ касательная к графику совпадает с осью абсцисс, во-вторых, поскольку значения функции могут быть как угодно близкими к числу 4, то либо $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$, либо $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, либо оба эти предела должны быть равны 4. Один из возможных графиков изображён на рисунке 52.

Упражнения

88. Какой знак имеет производная функции $y = f(x)$ (рис. 53) в точках с абсциссами a, b, c, d?

89. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 54—56). Определите по графику:

1) является ли точкой возрастания или точкой убывания точка:

а) $x = -1$; в) $x = 1$;
б) $x = 0$; г) $x = 1{,}5$;

2) промежутки, на которых производная положительна;

3) промежутки, на которых производная отрицательна;

4) точки, в которых производная равна нулю;

5) точки, в которых производная не существует.

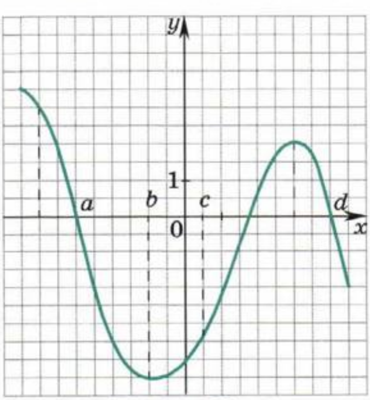


Рис. 53

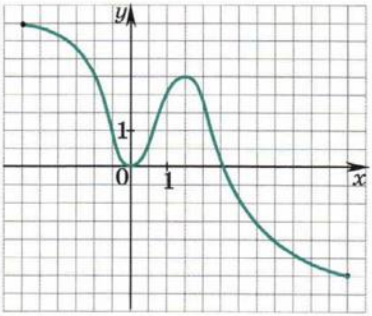


Рис. 54

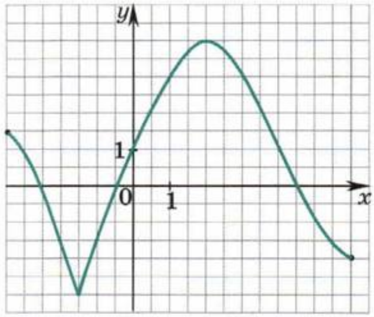


Рис. 55

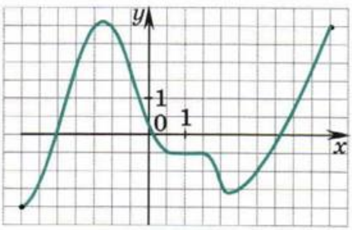


Рис. 56

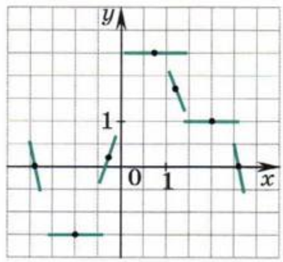


Рис. 57

90. На рисунке 57 к указанным точкам графика проведены касательные. Предложите какой-нибудь возможный вариант графика.

91. На рисунке 58 изображён график функции $y = f(x)$. В каких точках эта функция имеет максимумы, в каких — минимумы?

92. На рисунке 59 изображён график функции $y = p'(x)$.

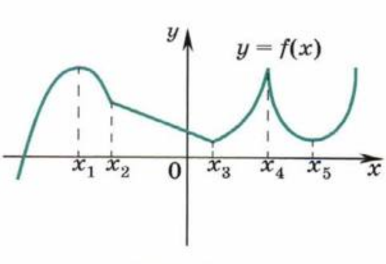


Рис. 58

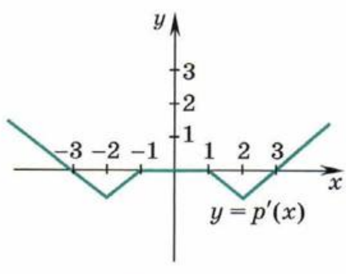
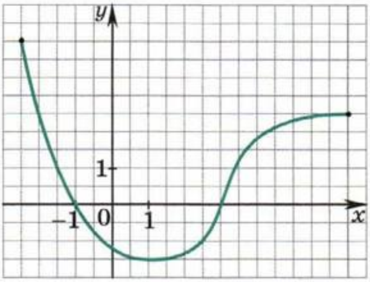
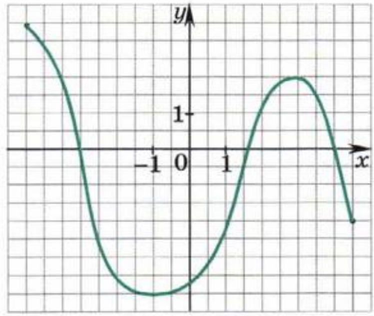


Рис. 59



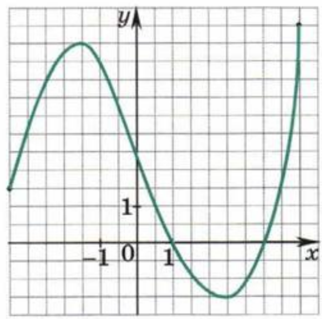
а)



б)

1) На каком промежутке функция $y = p(x)$:
а) возрастает;
б) постоянна;
в) убывает?
2) Изобразите схематически график функции $y = p(x)$, зная, что он проходит через начало координат.

93. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 60).
Укажите:
1) область определения функции;
2) множество значений функции;
3) нули функции;
4) точки графика, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс;
5) точки максимума и минимума;
6) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
7) значения аргумента при которых $f(x) < 1$;
8) точки пересечения с осями координат.



в)

Рис. 60

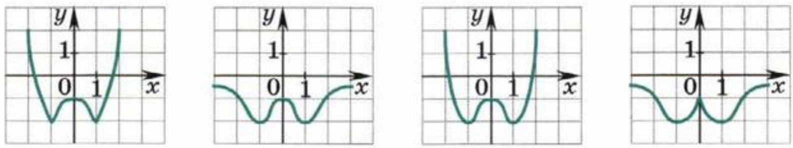
94. Постройте графики функций по таблицам.

1)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; +\infty)$	0	3
$f(x)$	↗	0	↘	-2	↗	$-1{,}5$	0

2)

x	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f(x)$	↘	2	↘	не сущ.	↗	2	↘



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 61

95. Четыре ученика выполнили построение графика функции (рис. 61) по следующей таблице.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

Объясните, какие ошибки допустили ученики при построении графиков.

96. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

1) а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;
в) производная функции положительна на $(2; 5]$, отрицательна на $[-2; -1)$ и на $(-1; 2)$;
г) $f'(x) = 0$ в точках с абсциссами -1 и 2;
д) нули функции: 0 и 3;

2) а) область определения функции есть промежуток $[-4; 4{,}5]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-3; 5{,}5]$;
в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $[-4; 1)$ и $(3; 4{,}5]$ и $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(1; 3)$;
г) значения функции отрицательны только на промежутке $[-4; -3)$;
д) $y_{\min} = f(3) = 1$, $y_{\max} = f(1) = 5{,}5$;

3) а) область определения функции — промежуток $[-5; 4)$;
б) значения функции составляют промежуток $[-5; 4]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(1; 2)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(-5; -1)$ и $(2; 4)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

г) нули функции: -3 и 2.

В упражнениях 97—99 используйте результаты упражнений 72, 73 предыдущего пункта.

97. Найдите промежутки монотонности функции:

1) $y = x^2$;
3) $y = \frac{1}{x}$;
5) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
2) $y = x^3$;
4) $y = \sqrt{x}$;
6) $y = \frac{x}{x-1}$.

98. Найдите критические точки и промежутки монотонности функции:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 6$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

99. Постройте схематически график функции

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 2.$$

100. Приведите пример функции $y = f(x)$, которая обладает следующим свойством:

1) $\forall x_1, x_2 \in D(f), f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$;

2) $\forall a > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 - x_2 < a \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < a$;

3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f), |x - 2| < \delta \Rightarrow 0 < 4 - f(x) < \varepsilon$;

4) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D(f), |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

101. Верно ли утверждение:

1) чётная функция может иметь единственную точку максимума;

2) нечётная функция может иметь единственную точку экстремума;

3) периодическая функция может иметь единственную точку экстремума;

4) монотонная функция может иметь точку экстремума?

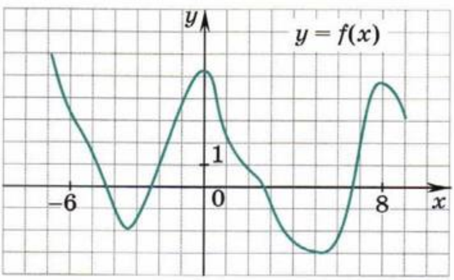
102. 1) Может ли иметь нечётное число экстремумов:

а) нечётная функция;
б) чётная функция?

2) Может ли чётная функция иметь чётное натуральное число экстремумов? Если может, то при каком условии?

Контрольные вопросы и задания

1. Является ли точка возрастания внутренней точкой области определения?
2. В каком случае функция, возрастающая на каждом из двух непересекающихся промежутков, возрастает и на их объединении?
3. Запишите для функции $y = \cos x$ общий вид:
   а) точек максимума;
   б) точек минимума;
   в) промежутков возрастания.
4. На рисунке изображён график функции. Определите количество целых значений её аргумента x, в которых производная функции положительна.



Вопросы для самооценки

1. Оцените результаты изучения этой главы. Довольны ли вы ими?
2. Что нового вы узнали в этой главе?
3. Как могут пригодиться вам эти знания в повседневной жизни?
4. Какие задания в этой главе были для вас самыми трудными? Почему?
5. Использовали ли вы при выполнении заданий дополнительные источники: справочники, пособия, интернет-ресурсы?
6. Обращались ли вы за помощью к одноклассникам, родителям, учителю?
7. Проверяли ли вы свои знания и умения по контрольным вопросам и заданиям к пункту?
8. Пользовались ли вы разделами «Ответы», «Советы» и «Решения», предметным указателем?

ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Как вы видели в предыдущей главе, производная является мощным средством для исследования функций. Однако процесс её нахождения, связанный с вычислением предела, даже в простых случаях довольно трудоёмок. В этой главе вы познакомитесь с возможностями существенного упрощения нахождения производных.

7. Производная суммы, произведения и частного функций

Многие функции можно представить как сумму, произведение или частное более простых функций. Пусть этими более простыми функциями будут дифференцируемые функции u и v с аргументом x.

1. Производная суммы функций

Поскольку приращение суммы функций складывается из приращений каждого слагаемого, то, заменяя предел суммы суммой пределов, получим:

$$(u+v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Производная суммы [разности] равна сумме [разности] производных:
$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

2. Производная произведения функций

Заменяя предел суммы суммой пределов, а пределы произведений произведениями пределов, получим:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v.$$

Заметим, что u — это функция аргумента x, а не Δx, поэтому, когда Δx стремится к нулю, значение u не меняется, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u = u$. Аналогично, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v = v$.

Функция v непрерывна, поскольку имеет производную, а приращение непрерывной функции стремится к нулю, когда к нулю стремится приращение её аргумента: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Таким образом:

$$\lim_{\Delta x \to 0} u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v =$$

$$= uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v.$$

Производная произведения двух функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй:

$$\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}.$$

Часто один из множителей является числовым. Поскольку производная постоянной равна нулю, получаем следующее равенство.

Числовой множитель можно вынести за знак производной:

$$\boldsymbol{(kv)' = kv'}.$$

Пример 1. Найти значение производной многочлена $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ при $x = -1$.

Решение. Используя формулу производной суммы и вынося за знаки производных числовые множители, получим:

$$P'(x) = (2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2)' =$$
$$= 2(x^4)' - 3(x^3)' + 5(x^2)' - 7x' + (2)'.$$

Как уже говорилось выше, производная числа (постоянной) равна нулю.

Касательные к графику функции $y = x$ в любых его точках с ним совпадают, значит, их угловые коэффициенты равны 1. Нетрудно найти производную этой функции и по определению: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$. Значит, $x' = 1$.

Менее приятно находить по определению производную функции $y = x^2$. Однако у нас есть формула производной произведения:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = x + x = 2x.$$

Аналогично находим производные функций $y = x^3$ и $y = x^4$.

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + x^2 = 3x^2;$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3.$$

Теперь можно завершить нахождение производной данного многочлена:

$$2(x^4)' - 3(x^3)' + 5(x^2)' - 7x' + (2)' = 8x^3 - 9x^2 + 10x - 7.$$

При $x = -1$ имеем: $P'(-1) = -8 - 9 - 10 - 7 = -34$.

Ответ: $P'(-1) = -34$.

Находить производные более высоких степеней x нам в этом задании было не нужно, однако можно показать, что $(x^5)' = 5x^4$, $(x^6)' = 6x^5$, и, вообще, при любом натуральном n справедлива следующая формула.

Производная степени

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

▼ В жизни мы обычно руководствуемся аналогиями, считая, что если определённый образ действий несколько раз приводил к успеху, то, скорее всего, он окажется правильным и в следующий раз. Однако в математике такая аргументация, конечно, недостаточна. Умозаключение, сделанное на основе анализа нескольких частных случаев, называют *индукцией* (от лат. inductio — выведение, наведение). В тех случаях, когда нужно *доказать*, что некоторое утверждение верно для любого натурального числа, обычно используется довольно простое рассуждение.

Утверждение верно для любого натурального числа, если:

1. утверждение верно для 1;
2. из того, что утверждение верно для натурального числа k, следует, что оно верно и для следующего натурального числа $k + 1$.

Та часть, в которой речь идёт о числах k и $k + 1$, как бы индуцирует из истинности утверждения для 1 его истинность для 2, затем из истинности для 2 индуцирует истинность для 3, затем для 4 и т. д. без каких-либо ограничений.

Рассуждения, проведённые по описанной схеме, называют ***методом математической индукции***.

Пример 2. Доказать методом математической индукции, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого натурального n.

1. Нужно убедиться в том, что формула верна при $n = 1$, т. е. $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}$. Получаем известное нам равенство $x' = 1$, значит, при $n = 1$ формула верна.

2. Запишем формулу при $n = k$: $(x^k)' = kx^{k-1}$ и постараемся из этого равенства с помощью известных нам правил перейти к формуле, где $n = k + 1$: $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$. Для этого рассмотрим x^{k+1} как произведение $x^k \cdot x$ и найдём производную произведения:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x' = kx^{k-1} \cdot x + x^k = (k+1)x^k.$$

Таким образом, из истинности формулы $n = k$ следует её истинность при $n = k + 1$.

Значит, формула верна при любом натуральном n, что и требовалось доказать. △

Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ верна не только для натуральных, но и для произвольных значений n. Мы докажем это в пункте 9, но использовать формулу начнём уже сейчас.

Пример 3. Найти производную функции $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Решение. Данная функция определена на $\boldsymbol{R}_+ = (0; +\infty)$. Для положительных значений x выражение $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ можно заменить степенью с дробным показателем: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{-\frac{3}{4}}$.

Применяя формулу производной степени, получим:

$$\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4}\,x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4}\,x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}.$$

Ответ: $y' = -\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$.

3. Производная частного функций

Найдём сначала производную функции $\dfrac{1}{v}$. Понятно, что точки, в которых функция v обращается в нуль, не входят в область определения функции $\dfrac{1}{v}$.

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{v + \Delta v} - \dfrac{1}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v - (v + \Delta v)}{(v + \Delta v)v\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(v + \Delta v)v} = -v' \cdot \frac{1}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}.$$

Теперь производную частного можно найти по формуле производной произведения, заменив в ней v на $\dfrac{1}{v}$:

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Производная частного функций

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Формулировка правила нахождения производной частного довольно громоздка, поэтому проще запомнить саму формулу.

Пример 4. Найти промежутки монотонности, экстремумы и построить график функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна при всех x. Найдём её производную:

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2};$$

$$y' = 0 \text{ при } x = \pm 1.$$

Изобразим кривую знаков производной (рис. 62).

Функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$, убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$.

-1 — точка минимума, 1 — точка максимума функции.

$$y_{\min} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}; \quad y_{\max} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Ось абсцисс — горизонтальная асимптота графика функции: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

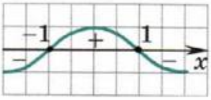


Рис. 62

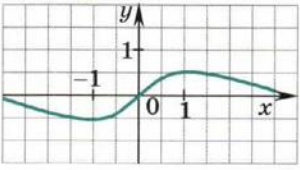


Рис. 63

График функции проходит через начало координат.

x	$(-\infty; -1]$	-1	$[-1; 1]$	1	$[1; +\infty)$	0	-2	2
Характер изменения и значения $f(x)$	$\searrow$	$\underset{\smile}{-0{,}5}$	$\nearrow$	$\overset{\frown}{0{,}5}$	$\searrow$	0	$-0{,}4$	$0{,}4$

Изобразим график функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ (рис. 63).

Примечание. Заметив, что данная функция нечётная, можно было рассматривать только неотрицательные значения аргумента, а затем применить симметрию относительно начала координат.

Упражнения

103. Пользуясь результатами № 72, 73 пункта 5, найдите производную функции:

1) $y = x^2 + x^3$;
2) $y = x^3 - x^2$;
3) $y = x^3 + \sqrt{x}$;
4) $y = x^3(x^2 - 4x + 6)$;
5) $y = (2x^3 - 3x^2 + 2)\sqrt{x}$;
6) $y = (2x^3 - 3x^2 + 2)(x^2 - 4x + 6)$.

104. Используя формулу производной степенной функции, найдите:

1) $(x^{10})'$;
2) $(x^{17})'$;
3) $(x^{-3})'$;
4) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'$;
5) $\left(x^{\frac{3}{7}}\right)'$;
6) $(x^{0,3})'$;
7) $(x^{2,7})'$;
8) $\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'$;
9) $\left(x^{-\frac{3}{7}}\right)'$.

105. Найдите производную функции, определённой на промежутке $(0; +\infty)$:

1) $y = \sqrt{x}$;
2) $y = \sqrt{x^5}$;
3) $y = \sqrt[3]{x^2}$;
4) $y = \sqrt[6]{x^5}$;
5) $y = \dfrac{1}{x^2}$;
6) $y = \dfrac{1}{x^5}$;
7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
8) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

106. Функция y определена на промежутке $(0; +\infty)$. Найдите её производную.

1) $y = 2\sqrt{x}(3 - 5x)$;
3) $y = 0,5x^2(\sqrt{8x^3} + 0,25x^4)$;
2) $y = \sqrt{2x}(3x + 1)$;
4) $y = \frac{x^3}{3}(\sqrt[5]{64x^7} - 0,2x^5)$.

107. Приведите пример какой-нибудь функции, производная y' которой равна:

1) 2;
2) $2x$;
3) $3x^2 - 2x + 4$;
4) $9x^2 + 6x + 1$;
5) $4x - 3$;
6) $0,5x^{-0,5}$;
7) $1,5x^{-0,5}$;
8)* $-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$.

108. Найдите в точке $x = 1$ производную функции:

1) $y = 3x^2 - 5x + 7$;
3) $y = \sqrt[3]{3x^2}$;
2) $y = 6x^3 - 2x^2 + 3x - 5$;
4) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{2x^2}} + 5$.

109. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$;
2) $f(x) = x^3 + x^2 - 12x - 1$ в точках с ординатой $y_0 = -1$;
3) $f(x) = 2x^5 - 10x - 3$, перпендикулярной оси ординат;
4)○ $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$, параллельной прямой $y = 4x - 3$.

110. В какой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°?

111.● На рисунке 64 не изображена ось абсцисс. Определите, какие знаки должны иметь $f_{\max}(x)$ и $f_{\min}(x)$, чтобы уравнение $f(x) = 0$ имело:

1) один корень;
2) два корня;
3) три корня.

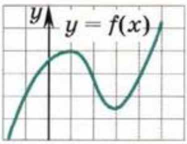


Рис. 64

112.● Найдите число корней уравнения:

1) $x^3 + x^2 - x + 5 = 0$; 2) $x^4 + x^3 - 6 = 0$; 3) $x^3 - 7x + 6 = 0$.

113.● При каких значениях a уравнение $6x^3 - 2x + a = 0$ имеет: 1) один корень; 2) два корня; 3) три корня?

114. 1) Докажите, что между двумя нулями дифференцируемой функции есть хотя бы один нуль её производной.
2) Докажите, что между двумя минимумами непрерывная функция обязательно имеет максимум.

115. Камень, брошенный вертикально вверх, движется по закону $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где h (м) — высота через t (с) после начала движения, h_0 (м) — начальная высота, v_0 (м/с) — начальная скорость, g (м/с^2) — ускорение свободного падения. Найдите:
1) скорость камня через 2 с;
2) на какой высоте скорость камня будет равна нулю, если $h_0 = 6$ м, $v_0 = 8$ м/с, $g \approx 10$ м/с^2.

116. Количество электричества q (Кл), протекающего через проводник, выражается формулой $q(t) = 3t^2 + 2t + 1$. Найдите формулу зависимости силы тока от времени $I(t) = q'(t)$ и силу тока в проводнике через 3 с после начала отсчёта.

117. Найдите производную функции:

1) $y = (x^2 - 3x)(x^3 - x^2)$;
3) $y = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x^2} - 7x\right)$;
2) $y = \sqrt{x}\,(\sqrt[3]{x^2} + x)$;
4) $y = (3x - 9)^2$.

118. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{x+3}{x}$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

119. Проверьте, является ли функция $f(x)$ производной функции $g(x)$:

1) $f(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$, $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$;

2) $f(x) = \frac{3-x}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$;

3) $f(x) = \frac{6+6x-2x^2}{(x^2+3)^2}$, $g(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+3}$;

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

120. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x-4}{\sqrt{x}+1}$ в точке с абсциссой, равной 1.

121. Докажите, что график функции $y = \frac{x+1}{x}$ пересекает прямую $y = 2x + 1$ под равными углами[1].

122. Количество электричества q (Кл), протекающего через проводник за время t (с), задаётся формулой:

1) $q(t) = t + \frac{3}{t}$;　　2) $q(t) = 2t + \sqrt{t} + 3$.

В какой момент сила тока в цепи равна нулю?

123. Найдите скорость изменения стоимости q (р.) товара при увеличении объёма его производства, если стоимость изготовления x изделий находится по формуле

$$q(x) = 10 + 22x + \frac{x^2}{1200}.$$

Какова стоимость изготовления одного изделия в серии из 120 штук?

124. Лифт после включения движется по закону $s(t) = 1{,}5t^2 + 2t + 12$ (м), где t (с) — время движения лифта. Найдите формулу скорости движения лифта и скорость лифта в конце второй секунды.

125. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и:

1) перпендикулярной;

2) параллельной касательной к графику функции $y = \frac{x+5}{x}$ в его точке с абсциссой, равной -1.

126. Найдите координаты точки A графика функции $y = \frac{x^2}{x+1}$ на рисунке 19 (с. 30).

127. Найдите промежутки монотонности, экстремумы и постройте график функции:

1) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;　　3) $y = \frac{x^2}{1-2x}$;

2) $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x - 2$;　　4) $y = \frac{0{,}5x^3}{x^2 + 2x + 1}$.

[1] Угол, под которым график пересекает прямую, — это угол между касательной к графику в точке его пересечения с прямой и самой прямой.

128. Найдите угол между касательными, проведёнными из точки (0; 2) к параболе $y = -3x^2$.

129. Найдите точки графика функции $y = \dfrac{x+2}{x-2}$, в которых касательные к нему образуют с осью абсцисс угол $\dfrac{3\pi}{4}$.

130. Выведите формулу производной произведения трёх функций $(uvw)'$.

В упражнениях 131—134 примените метод математической индукции.

131. Докажите, что при любом натуральном значении n число:
1) $5 \cdot 2^{3n} - 2$ кратно 19; 2) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ кратно 133.

132. Докажите равенство при всех натуральных значениях n, больших 1:

1) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(2n+1) = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

3) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

133. Докажите, что при всех натуральных значениях n верно неравенство:
1) $4^n > 7n - 5$; 2) $3^n - 2^n \geqslant n$; 3) $4^n \geqslant n^2 + 3^n$.

134. Докажите, что сумма любого числа положительных чисел, произведение которых равно 1, больше или равна числу слагаемых, т. е. если $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

! Контрольные вопросы и задания

1. Верно ли, что приращение произведения двух функций равно произведению их приращений?
2. Найдите производную функции

$$y = (x^2 - 3x + 1)(x^3 + 3x - 2):$$

1) используя правило нахождения производной произведения;
2) предварительно раскрыв скобки и приведя подобные члены.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^6 - 2x + 3$, которая:

1) проходит через точку пересечения графика с осью ординат;
2) параллельна прямой $y = 4x - 3$.

8. Производная сложной функции

В 10 классе, ещё не зная ни производной, ни возможностей её применения для нахождения промежутков монотонности, вы использовали в различных задачах свойства основных элементарных функций. Так, например, чтобы доказать возрастание функции $y = \log_2(3^{2x-1} + 5)$, достаточно заметить, что большему значению x соответствует большее значение выражения $2x - 1$; большему значению $2x - 1$ соответствует большее значение выражения 3^{2x-1}; большему значению 3^{2x-1} соответствует большее значение выражения $3^{2x-1} + 5$, и, наконец, большему значению $3^{2x-1} + 5$ соответствует большее значение выражения $\log_2(3^{2x-1} + 5)$, т. е. самой функции y. Эти выводы основаны на том, что линейная функция $t = 2x - 1$, показательная функция $s = 3^t$, линейная функция $u = s + 5$ и логарифмическая функция $v = \log_2 u$ являются возрастающими. То есть при увеличении значений их аргументов увеличиваются и значения самих функций. Таким образом, функция $y = \log_2(3^{2x-1} + 5)$ оказывается, подобно русской матрёшке, сложена из других, более простых функций

$$y = v(u(s(t(x)))).$$

Можно сказать, что эта ***сложная функция*** y составлена из функций v, u, s и t.

Рассмотрим сложную функцию $y = u(v(x))$, где функция v имеет производную в точке x, а функция u имеет производную в точке $v(x)$. Функцию u иногда называют ***внешней***, а функцию v — ***внутренней***. Заметим, что приращению Δx соответствует приращение Δv, которому, как приращению аргумента функции $u(v)$, в свою очередь, соответствует приращение Δu. Тогда:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot \Delta v} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

По условию функция v дифференцируема в точке x, а значит, её приращение Δv стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta v\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'_v \cdot v'_x$$

(нижние индексы показывают, по какому аргументу находится производная).

Производная сложной функции равна произведению производных внешней и внутренней функций:

$$(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x.$$

▼ В выводе этой формулы есть небольшая тонкость — функция $v(x)$ не должна в окрестности точки x представлять собой постоянную. В противном случае приращение Δv в этой окрестности будет тождественно равно нулю, и выражение $\frac{\Delta u}{\Delta v}$ лишится смысла. △

Пример 1. Найти значение производной функции $y = (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^5$ при $x = 1$.

Решение. Функция y сложная. Она составлена из двух функций: внутренней $v = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ и внешней $u = v^5$. Применим формулу производной сложной функции:

$$(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x = (v^5)'_v \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)'_x =$$
$$= 5v^4(6x^2 - 10x + 4) = 5(2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^4(6x^2 - 10x + 4).$$

Найдём $y'(1)$: $y'(1) = 5(2 - 5 + 4 - 3)^4(6 - 10 + 4) = 0.$

Ответ: $y'(1) = 0.$

▼ **Пример 2.** Найти уравнение касательной к кривой, заданной уравнением $y^2x + yx^2 = 6$, в её точке $M(2; -3)$.

Решение. Переменная y задана уравнением $y^2x + yx^2 - 6 = 0$ *неявно*. Однако из этого уравнения её можно выразить, если рассмотреть его как квадратное относительно y:

$$y = \frac{-x^2 \pm \sqrt{x^4 + 24x}}{2x}.$$

Данная кривая состоит из графиков двух функций, соответствующих знакам «+» или «–» формулы (рис. 65).

График, которому принадлежит точка M, соответствует знаку «–»:

$$y = \frac{-x^2 - \sqrt{x^4 + 24x}}{2x}.$$

Используя правила и формулы дифференцирования, можно найти $y'(x)$, вычислить $y'(2)$ и подставить это значение в уравнение касательной.

Однако намного проще решить эту задачу иначе.

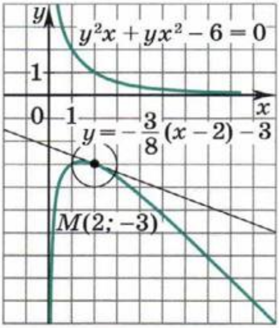


Рис. 65

В некоторой окрестности точки M переменная y является функцией переменной x. Рассматривая левую часть равенства как сложную функцию и используя формулу производной сложной функции, найдём производные от обеих частей данного в условии уравнения:

$$(y^2x + yx^2)' = (6)',$$

$$(y^2)'x + y^2x' + y'x^2 + y \cdot (x^2)' = 0,$$

$$2yy' \cdot x + y^2 + y'x^2 + y \cdot 2x = 0.$$

Подставим в полученное уравнение координаты точки M и найдём значение $y'(2)$:

$$2 \cdot (-3)y'(2) \cdot 2 + 9 + 4y'(2) + (-3) \cdot 4 = 0,$$

$$-8y'(2) - 3 = 0, \quad y'(2) = -\frac{3}{8}.$$

Остаётся подставить найденный угловой коэффициент касательной в её уравнение $y = k(x-2) - 3$, $y = -\frac{3}{8}(x-2) - 3$.

Ответ: $y = -\frac{3}{8}x - 2\frac{1}{4}$. △

Упражнения

135. Составьте сложную функцию $y = f(x)$:

1) $y = e^t$, $t = 2x + 3$;
2) $y = \sin k$, $k = x^2 + 1$;
3) $y = \ln c$, $c = \sqrt[5]{2x}$;
4) $y = 2^n$, $n = \cos m$, $m = x + 3$;
5) $y = \frac{1}{z}$, $z = d^2$, $d = 5x - 1$;
6) $y = h^5$, $h = (p+6)^{-2}$, $p = \lg x$.

136. Выделите в сложной функции внутреннюю и внешнюю функции:

1) $y = \log 2^x$;
2) $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$;
3) $y = 2^{x+5}$;
4) $y = \sqrt{\sin x^3}$;
5) $y = (\cos x + \sin x)^3$;
6) $y = \dfrac{5}{(x^2 + 4x + 3)^5}$.

137. Дана функция $y = ||x - 2| - 3|$.

1) Рассматривая функцию y как сложную функцию $y = f(u(v(s(x))))$, запишите функции $s(x)$, $v(s)$, $u(v)$ и $f(u)$.
2) С каким преобразованием графика связан переход от каждой внутренней функции к внешней для неё?
3) Постройте график функции y и с помощью графика:
а) решите уравнение $||x - 2| - 3| = 1$;
б) найдите значение a, при котором уравнение $||x - 2| - 3| = a$ имеет ровно три корня.

138. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$. Напишите выражение для производной функции:

1) $y = \sqrt{f(x)}$;
2) $y = f(\sqrt{x})$.

139. Найдите производную функции:

1) $y = (x^4 + 6x^2 - 2x - 9)^3$;
2) $y = \left(\dfrac{1}{2x+3}\right)^4$;
3) $y = \sqrt{(x-3)(x+3)}$;
4) $y = \left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{x}\right)^9$.

140. Какая из функций:

$$y = \sqrt{x^3 + 2x + 6},$$

$$y = \frac{1}{(x^2 - 3x)^2},\ y = (2x - 12)^2(x^2 + 1)$$

имеет самую большую производную в точке $x = 1$?

141. При каком значении a число 2 является:

1) точкой минимума;
2) точкой максимума функции:

а) $y = (2x - a)^6 (x + a)^4$;
б) $y = (x - a)^6 (x - 1)^3$;
в) $y = (2x - a)^3 (x + a)^4$;
г) $y = (5x - a)^3 (x + a)^5$?

142. В какой из двух точек — x_1 или x_2 — производная функции y больше:

1) $y = \dfrac{(3x+1)^2}{x^2+1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$;

2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$?

143. Найдите экстремумы функции y:

1) $y = (2x^3 - 3x^2 - 12x - 2)^5$;

2) $y = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x}{2}$;

3) $y = \dfrac{2}{1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$;

4) $y = -\dfrac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$.

144. Найдите угловой коэффициент общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = 3 - 2(x - 6)^2$.

145. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой в точке A:

1) $yx + x^2 + 4 = 0$, $A(2; -4)$;

2) $y^2x = 9$, $A(1; 3)$;

3) $y^3 - yx - 6 = 0$, $A(-1; -2)$;

4) $y^2x + 2x^2 - 5 = 0$, $A\left(-4; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

146. Найдите уравнение касательной к кривой:

1) $y = (x^3 + 2x)^2$ в точке с абсциссой, равной -2;

2) $y = ((x + 2)^3 - 1)^2$ в точке её пересечения с осью ординат;

3) $y = \sqrt{4 + 4x + x^2}$ в точке с абсциссой, равной 2;

4) $y(x^2 + 2x) = 18$ в точке с абсциссой, равной 2;

5) $y(x^2 - 2yx) = 3$ в точке $M(3; 1)$;

6) $x^3y - xy^2 = 6$ в точке $F(2; 1)$.

147. Докажите, что функция $y = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ убывающая, и решите уравнение $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$.

148. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x^2}$; 3) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$;

2) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$; 4) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-4}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Возрастающей или убывающей является сложная функция, если:

а) и внешняя, и внутренняя функции возрастают;
б) внешняя функция возрастает, а внутренняя убывает;
в) и внешняя, и внутренняя функции убывают;
г) внешняя функция убывает, а внутренняя возрастает?

2. Из каких функций составлена сложная функция

$$y = e^{\sqrt{\lg \sin x - \lg 0{,}5}}?$$

Найдите область её определения, промежутки монотонности и точки экстремума.

3. Найдите касательную к кривой из примера 2 в её точке $N(2;\ 1)$.

9. Формулы производных основных функций

К основным, знакомым вам элементарным функциям относятся линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Производные первых трёх функций из этого списка вы находить научились (формулу производной степенной функции, правда, ещё предстоит вывести).

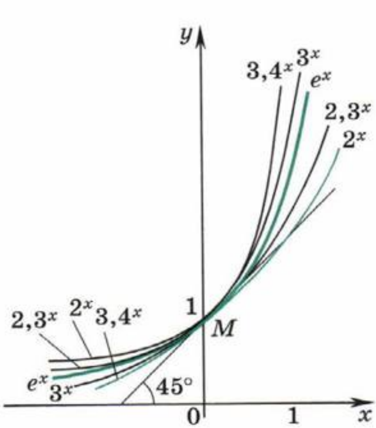


Рис. 66

Чтобы получить формулу производной показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), воспользуемся графическими соображениями.

Рассмотрим графики показательных функций при $a > 1$ и проведём к ним в их общей точке

$M(0;\ 1)$ касательные (рис. 66). Угловой коэффициент касательной в зависимости от a может быть равен любому положительному числу. На рисунке 66 выделен график, касательная к которому имеет угловой коэффициент 1, т. е. параллельна прямой $y = x$.

Обозначим буквой e основание этой показательной функции[1].

Из рисунка видно, что $2 < e < 3$. Однако это довольно грубое приближение. Встретившись в 10 классе с числом e как основанием *натуральных логарифмов* ($\log_e x = \ln x$), вы использовали более точное приближение $e \approx 2{,}71$.

▼ С числом e математики познакомились не как с основанием соответствующей показательной функции, а как с пределом последовательности: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

■ Доказательство существования этого предела довольно трудоёмко, но с помощью калькулятора этот предел можно достаточно точно вычислить. Для этого будем находить значения выражения $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, увеличивая значения n:

$$(1+1)^1 = 2, \quad \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}59,$$

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}70, \quad \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}717,$$

$$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10000} \approx 2{,}7181,$$

$$\left(1 + \frac{1}{100\,000}\right)^{100000} \approx 2{,}7183 \text{ и т. д. } \triangle$$

Число e является иррациональным и не может быть выражено в виде конечной десятичной дроби, однако можно найти его приближение с любой точностью, например $e \approx 2{,}718281828459045$.

Равенство единице углового коэффициента касательной к графику функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ означает, что в этой точке значение производной равно 1: $y'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$.

---

[1] Обозначение «e» было выбрано в честь великого математика Леонарда Эйлера (1707—1783) и является первой буквой его фамилии Euler. В последней главе учебника вы увидите знаменитые формулы Эйлера, в которых это число фигурирует.

Используя значение производной в нуле, найдём производную функции $y = e^x$ в произвольной точке x:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Получить формулу производной показательной функции с произвольным основанием a ($a > 0$, $a \neq 1$) поможет формула производной сложной функции.

Поскольку $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$, имеем:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a. \ \triangle$$

Производная показательной функции

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Похожим способом, находя сначала угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$, можно получить формулы производных тригонометрических функций.

В 10 классе говорилось, что графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$ вблизи начала координат сливаются с прямой $y = x$ (рис. 67).

Значит, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

▼ Можно было воспользоваться тригонометрическим кругом. Поскольку ось тангенсов касается тригонометрического круга (рис. 68), то $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

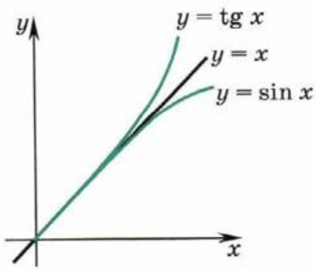


Рис. 67

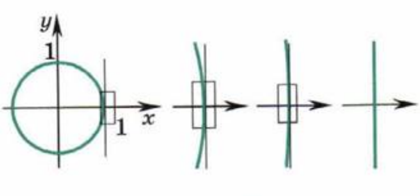


Рис. 68

$$1 = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot 1 = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}. \triangle$$

Найдём теперь производную функции $y = \sin x$ в произвольной точке x:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x\to0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \cos x\cdot 1 = \cos x.$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Правила нахождения производных, тригонометрические формулы и формула производной сложной функции помогают получить производные косинуса, тангенса и котангенса.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin' x)\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \frac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x;\quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};\quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

Из основных элементарных функций остались логарифмическая и обратные тригонометрические функции. Выведем формулы их производных.

По определению логарифма при $a > 0$, $a \neq 1$ имеем: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$. Последнее равенство задаёт функцию y неявно, что, однако, не мешает найти производные от обеих его частей: $x' = (a^y)'$, $1 = a^y \ln a \cdot y'$.

Заменяя a^y на x и выражая y', получим: $1 = x \ln a \cdot y'$, $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$. Конечно, следует помнить, что $D(y') = (0; +\infty)$, так как $D(\log) = \boldsymbol{R}_+$.

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Для натурального логарифма из этой формулы получим: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln e} = \dfrac{1}{x}$.

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Аналогичным способом выведем формулы обратных тригонометрических функций.

По определению арксинуса при $x \in [-1; 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеем: $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$.

Находим производные от обеих частей последнего равенства: $(\sin y)' = x'$, $\cos y \cdot y' = 1$. Поскольку при $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ значения косинуса неотрицательны,

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

Следовательно, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Аналогично получаются следующие формулы.

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Нам осталось выполнить данное в пункте 7 обещание и вывести формулу производной степенной функции $y = x^r$, где r — любое действительное число.

Рассмотрим функцию $y = x^r$ при $x > 0$. Прологарифмируем равенство $y = x^r$ и найдём производные от обеих частей:

$$\ln y = r\ln x,\ (\ln y)' = (r\ln x)',\ \frac{y'}{y} = \frac{r}{x},\ y' = \frac{ry}{x}.$$

Заменим y его выражением через x: $y' = \dfrac{rx^r}{x} = rx^{r-1}$.

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

Примечание. При $x < 0$ показатель степени функции $y = x^r$ может быть только целым числом. Пользуясь свойством чётности степенной функции с чётным показателем, формулой производной сложной функции и свойством нечётности степени с нечётным показателем, имеем при $x < 0$ и $r = 2n$ (n — целое):

$$(x^r)' = ((-x)^{2n})' = 2n(-x)^{2n-1}(-x)' =$$
$$= -2n(-x)^{2n-1} = 2nx^{2n-1} = rx^{r-1}.$$

Если же показатель степени нечётный: $r = 2n + 1$ (n — целое), то при $x < 0$ имеем:

$$(x^r)' = (-(-x)^{2n+1})' = -(2n+1)(-x)^{2n}(-x)' =$$
$$= (2n+1)(-x)^{2n} = (2n+1)x^{2n} = rx^{r-1}.$$

Таким образом, формула производной степени распространяется и на промежуток $(-\infty; 0)$.

При $x = 0$ производная функции $y = x^r$ существует только при $r \geqslant 1$.

▼ Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Этим фактом можно воспользоваться при выводе формулы производной обратной функции.

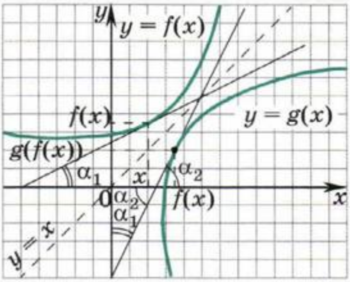


Рис. 69

Сравним угловые коэффициенты симметричных касательных $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ к графикам взаимно обратных функций $f(x)$ и $g(x)$ в их точках $(x;\ f(x))$ и $(f(x);\ g(f(x)))$ соответственно (рис. 69). В силу упомянутой симметрии $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$ и, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}$.

Это означает, что угловые коэффициенты рассматриваемых касательных взаимно обратны. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_1 = f'(x)$, а $\operatorname{tg}\alpha_2 = g'(f(x))$, получаем формулу производной обратной функции.

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

В этой формуле $g'(f(x))$ не производная сложной функции, а значение производной функции g в точке $f(x)$.

Пусть теперь $f(x) = \log_a x$, а $g(t) = a^t$. Зная производную функции $g(t)$: $g'(t) = (a^t)' = a^t \ln a$, из формулы производной обратной функции при значении $t = f(x) = \log_a x$ получим формулу производной логарифма.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \quad \triangle$$

Упражнения

149. Вычислите пределы:

1) а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{7x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$;

2) а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{\operatorname{tg} 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 4x$;

3) а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

150. Функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, напишите выражение для производной функции y:

1) $y = e^{f(x)}$; 3) $y = \ln f(x)$;

2) $y = f(e^t)$; 4) $y = \sin f(x)$.

151. Найдите производную функции:

1) $y = e^{-x}$; 3) $y = \frac{2^x}{3^x}$;

2) $y = e^{4-5x}$; 4) $y = x^2 \cdot 5^{3x}$.

152. Найдите скорость радиоактивного распада цезия-135, зная, что период его полураспада 31 год.

153. Сила тока I (А) изменяется в зависимости от времени по закону $I(t) = 2^{2-t}$, где t (с) — время. Найдите скорость изменения силы тока в конце четвёртой секунды.

154. Укажите интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функции:

1) $y = xe^{-3x}$; 3) $y = x^2 - \ln x^2$;

2) $y = \frac{x^2}{2^x}$; 4) $y = 2\ln(x-2) - x^2 + 4x + 1$.

155. Исследовав с помощью производной функцию $f(t) = \log_t(t+1)$ на монотонность:

1) сравните числа $\log_9 10$ и $\lg 11$;

2)* решите уравнение $\log_{6-x}\log_2 x = \log_{7-x}\log_2 2x$.

156. Найдите производную функции:

1) $y = 4\sin x - \cos x$; 5) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$;

2) $y = \cos(2x-4)$; 6) $y = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{x}$;

3) $y = \cos x \sin x$; 7) $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

4) $y = \operatorname{tg} x^3$; 8) $y = 2\operatorname{arcctg}\frac{\ln x}{x}$.

157. Найдите все значения x, при которых производная функции y равна нулю:

1) $y = 5 + 8\cos\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$;

2) $y = 1 + 4\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2}\cos x$;

4) $y = 5x + \sin 2x - 4\sqrt{3}\sin x$.

158. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = 2 - 2\cos 2t$, в момент времени $t = \frac{\pi}{6}$.

159. Составьте уравнение касательной к графику функции y в точке x_0:

1) $y = \sin^3 x$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$;

2) $y = \cos^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

3) $y = \operatorname{tg}^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

4) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

160. Исследуйте с помощью производной функцию и постройте её график:

1) $y = \sin x + \cos x$;

2) $y = x + \sin x$;

3) $y = x + \sin 2x$;

4) $y = 2^x \cos x$.

161. Докажите, что функция:

1) $y = 2x - \sin x$ является возрастающей;

2) $y = x - \cos x$ является возрастающей;

3) $y = \frac{1}{x+2}$ убывает на промежутке $(-2; +\infty)$;

4) $y = \operatorname{tg} x - x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает.

162. Найдите, при каких значениях a функция $f(x) = \sin x - ax$ убывает на всей числовой прямой.

163. Под каким углом пересекает ось абсцисс:

1) синусоида $y = \sin x$;

2) тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$?

164. К графику функции $y = 2\sin x + 3\cos x$ проведены касательные в точках $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Параллельны ли эти касательные между собой?

165. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x) = 6\sin x - \cos x$ в его точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

166. Определите, имеет ли функция y максимум или минимум:

1) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$;
2) $y = \cos^2 x + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y = 2^{-x^2}$;
4) $y = (x+1)^{10}e^{-x}$.

167. Запишите какую-нибудь пару взаимно обратных функций $f(x)$ и $g(x)$, если:

1) $f'(x) = 3$;
2) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3) $f'(x) = 2e^{2x}$;
4) $f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$.

168. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x - \ln x$;
2) $y = \frac{x}{\ln x}$;
3) $y = \lg^2(x+2)$;
4) $y = \frac{x^2}{2^x}$;
5) $y = -\frac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$;
6) $y = \log_{0,5}(2x^2 - 3x - 2)$.

169. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;
2)○ $f(x) = 3^x + 3^{-2x}$, $x_0 = 1$;
3)○ $f(x) = \sqrt{4 - 2x - x^2}$, $x_0 = 0$.

170. Найдите угол между касательными к кривой $y = \ln x$ в точках с абсциссами $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$.

171. В каких точках график функции $y = x + \sqrt[3]{\sin x}$ имеет вертикальные касательные?

172.○ Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2x+1}{e^{2x}}$ в точке её максимума.

173. Докажите, что функция $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$ постоянная при всех $x \in [1; +\infty)$.

174. Найдите приближённо:

1) $(0{,}998)^4$; 2) $\sqrt[3]{1{,}003}$; 3) $\lg 102$.

175. Исследуйте функцию $y = x^p e^{-x}$ на монотонность и постройте её график при $p = 2$.

176. 1) Докажите, что при любом неотрицательном значении x верно неравенство:

а) $e^x \geqslant 1 + x$;

б) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$;

в) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

2) Выявите закономерность составления этих неравенств и запишите следующее неравенство.

177. Докажите, что для любого неотрицательного значения x верно неравенство $\ln(1 + x) \geqslant \frac{2x}{x+2}$.

178. Составьте уравнения касательных к графику функции $f(x)$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью S:

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $S = 2$;

2) $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2}$, $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

179. Найдите все точки графика функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28,$$

в каждой из которых касательная к нему отсекает от положительных координатных полуосей равные отрезки.

180. Найдите абсциссу точки графика функции $y = f(x)$, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен k, если:

1) $f(x) = 10 - e^{4 - 0{,}1x}$, $k = 0{,}1$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = \frac{2}{3}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 14}{x + 2}$, $k = -1$;

4) $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + 2\sqrt{3} - 3$, $k = 0$.

181. Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие отрезку L, если:

1) $f(x) = \cos^2 x + \sin x - 5$, $L = [0; 2]$;

2) $f(x) = \sin^2 x - \cos x + 4$, $L = \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

182. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = p(x)$ образует в верхней координатной полуплоскости острый угол с положительным направлением оси абсцисс, если:

1) $p(x) = x^4 - x^3$;

2) $p(x) = \operatorname{tg} x - 2x$;

3) $p(x) = \sqrt{2x - 3}$;

4) $p(x) = x + \ln(-x)$.

183. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = p(x)$ образует в верхней координатной полуплоскости тупой угол с положительным направлением оси абсцисс, если:

1) $p(x) = x\ln x - 3x$;

2) $p(x) = -4\cos x + 2x$;

3) $p(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$;

4) $p(x) = x^2e^x$.

184. При каких значениях x:

1) $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$, $g(x) = 2x + 8$;

2) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$;

3) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = 3x + 81$, $g(x) = \operatorname{tg} x$;

4) $f'(x) \geqslant g'(x)$, если $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right)$, $g(x) = 3 - x\sqrt{2}$?

185. 1) Найдите производную бесконечно колеблющейся функции $y = \begin{cases} x + x^2 \sin \dfrac{5}{x} \text{ при } x \neq 0 \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ упомянутой в пункте 6:

а) при $x \neq 0$;

б) при $x = 0$.

2)* Докажите, что эта функция не является монотонной ни на одном из промежутков, содержащих точку $x = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие свойства и формулы использованы в примечании при выводе производной степенной функции с нечётным показателем степени для отрицательных значений x?
2. Что можно сказать о значении сложной функции, внешняя и внутренняя функции которой взаимно обратны?
3. Докажите, что не имеют экстремумов функции:

$$y = \frac{1}{x};\ y = \operatorname{tg} x;\ y = x^3 + x + 5;\ y = -\frac{1}{x^3}.$$

10. Наибольшее и наименьшее значения функции

Решение многих задач приводит к необходимости нахождения наибольшего или наименьшего значений того или иного выражения. Некоторые из таких задач можно решить без привлечения методов математического анализа. Так, например, вы знаете, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, где $a < 0$, принимает своё наибольшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$ (абсцисса вершины соответствующей параболы), а сумма положительных значений обратно пропорциональных переменных минимальна при их равенстве.

Задачи на максимум и минимум всегда привлекали внимание математиков. Ещё в Древней Греции знаменитые Аполлоний, Архимед и Евклид находили наибольшие площади и объёмы. Однако только в XVII в. П. Ферма[1], И. Кеплер[2] и, наконец, Г. Лейбниц и И. Ньютон разработали

---

[1] *Пьер Ферма́* (1601—1665), работая советником парламента в Тулузе, прославился как великий математик, которого заслуженно считают предвестником математического анализа. Он участвовал в создании общих методов решения задач на максимум и минимум, разработал приёмы построения касательных к кривым, вычисления площадей криволинейных фигур и длин кривых. Открытия Ферма становились известными из его переписки с другими математиками.

[2] *Иоган Ке́плер* (1571—1630) известен как немецкий астроном, открывший законы движения планет, и математик, разработавший теорию использования логарифмов для вычислений и составивший таблицы логарифмов.

общий подход к нахождению наибольших и наименьших значений функции. Этот подход связан с применением производной. Ему в основном и посвящён этот пункт.

Если функция $y = f(x)$ рассматривается на отрезке, то своё наибольшее или наименьшее значение на нём она может принимать либо в его концах, либо в критических точках. Действительно, поскольку ни в точке убывания (где $y' < 0$), ни в точке возрастания (где $y' > 0$) значение функции не является ни наибольшим, ни наименьшим, остаются только концы отрезка и критические точки.

На рисунке 70 наибольшее значение функция принимает в точке x_2, а наименьшее — в точке b, правом конце отрезка. Это можно записать так: $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_2)$, $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$.

З а м е ч а н и е. Непрерывная на отрезке функция обязательно принимает на нём и своё наибольшее, и своё наименьшее для этого отрезка значение. А вот разрывная функция может не иметь на отрезке ни наибольшего, ни наименьшего значения (рис. 71).

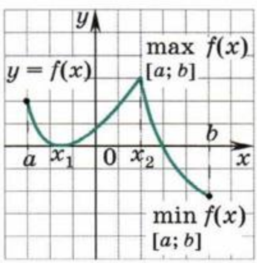


Рис. 70

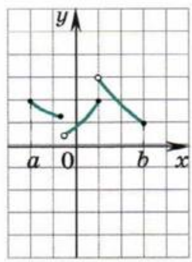


Рис. 71

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее из значений, которые принимает функция $f(x) = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-2; 3]$.

Р е ш е н и е.

(1) Найдём критические точки функции на отрезке $[-2; 3]$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3;\ f'(x) = 0\colon x = -1 \text{ или } x = 1.$$

(2) Найдём значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(-2) = 1,\ f(-1) = 5,\ f(1) = 1,\ f(3) = 21.$$

3 Сравним найденные значения функции:

$$f(-2) = f(1) < f(-1) < f(3).$$

Ответ: $\max\limits_{[-2;\,3]} f(x) = f(3) = 21$, $\min\limits_{[-2;\,3]} f(x) = f(-2) = f(1) = 1$.

Примечание. Заметим, что отрезок, концами которого являются наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции, представляет собой её область значений.

Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения часто приводят к рассмотрению функции на промежутке (конечном или бесконечном), где у неё есть *единственная* критическая точка.

Если в единственной критической точке непрерывная функция имеет максимум, то он является ***наибольшим***, а если минимум, то ***наименьшим её значением***.

Пример 2. Из квадратного листа картона 1×1 м вырезают по углам квадраты и, как показано на рисунке 72, сгибают коробку. Какие стороны должны иметь отрезанные квадраты, чтобы объём полученной коробки был наибольшим?

Решение.

1 Обозначим искомую сторону буквой x и выразим объём коробки как функцию с аргументом x: $V(x) = (1 - 2x)^2 x$.

Понятно, что коробка, а вместе с ней и её объём могут существовать только когда $0 < x < 0{,}5$. Значит, $D(V) = (0; 0{,}5)$.

2 Найдём наибольшее значение функции $V(x)$.

$$V' = ((1 - 2x)^2 x)' = (x - 4x^2 + 4x^3)' = 1 - 8x + 12x^2;$$

$$V' = 0\colon 12x^2 - 8x + 1 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{1}{2} \text{ (рис. 73).}$$

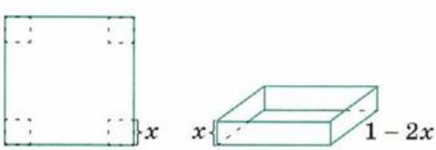


Рис. 72

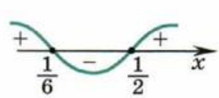


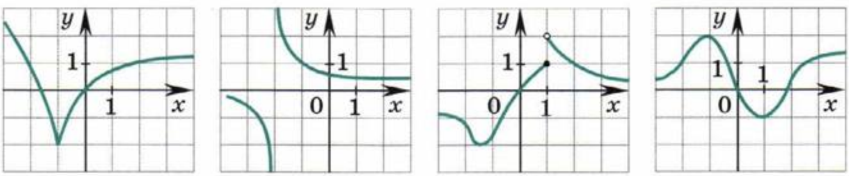
Рис. 73

В области определения оказалась единственная критическая точка — точка максимума $x = \frac{1}{6}$. Значит, в этой точке функция $V(x)$ принимает своё наибольшее значение.

Ответ: $\frac{1}{6}$ м.

Упражнения

186. На рисунке 74 изображены графики функций. Какие из этих функций имеют наибольшие (наименьшие) значения, и чему эти значения равны?



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 74

187. Найдите наименьшее и наибольшее из значений, которые принимает функция $f(x)$ на отрезке L, если:

1) $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$, $L = [1; 4]$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 48x$, $L = [0; 9]$;

3) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $L = [1; 2]$;

4) $f(x) = x - 2\ln x$, $L = \left[\frac{3}{2}; e\right]$;

5) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $L = \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

6) $f(x) = (x - 3)e^x$, $L = [1; 4]$;

7) $f(x) = \sqrt{5 - 4\sin x}$, $L = [0; \pi]$;

8) $f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}$, $L = [-1; 1]$.

188. Найдите область значений функции $y = \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 2}$.

189. Пересекает ли прямая $y = 1{,}3$ график функции $y = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 3}$?

190. Найдите:

1) наименьшее значение функции $y = 2^x + 2^{-x}$;
2) область значений функции $y = \cos^2 x + \cos x + 3$.

191. При каких значениях a имеет решение уравнение

$$\sqrt{3x-3} + \sqrt{5-x} = a?$$

192. Найдите положительное число x, которое даёт:

1) наименьшую сумму $x + \frac{1}{x}$;
2) наибольшую разность $x - x^3$;
3) наибольшую разность $x - x^2$.

193. 1) Сумма двух положительных чисел равна 10. Найдите эти числа, если сумма квадрата первого из них с кубом второго принимает наименьшее из всех возможных значений.

2) Представьте число 5 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и второго, возведённого в четвёртую степень, было наибольшим.

3) Число 147 разбейте на два положительных слагаемых так, чтобы произведение одного из них на квадратный корень из другого было наибольшим.

4) Число e представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого оказалась наименьшей.

194. В какой точке нужно провести касательную к графику функции $y = (x - 2)^2$, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и положительными полуосями координат, была наибольшей?

195. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник с наименьшей площадью.

196. Из всех прямоугольников данного периметра найдите тот, у которого диагональ наименьшая.

197. Прямоугольный лист жести имеет длину 64 см и ширину 40 см. Из этого листа требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом к основанию. Какими следует взять стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки (объём прямоугольного параллелепипеда) оказалась максимальной?

198. Докажите, что из всех треугольников, вписанных в данный круг, наибольшая площадь у равностороннего треугольника.

199. При каких размерах прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием и площадью полной поверхности S имеет наибольший объём?

200. Из прямоугольной полосы жести шириной 4 дм требуется изготовить жёлоб прямоугольного сечения. Определите наибольшую площадь поперечного сечения жёлоба.

201. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Какими должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

202. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a укажите треугольник наибольшей площади.

203. На окружности радиусом 4 см взяты точки A, B и C так, что хорда BC перпендикулярна касательной, проведённой к окружности в её точке A, и треугольник ABC имеет наибольшую возможную при этом площадь. Найдите площадь треугольника ABC.

204. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник со сторонами a, b и c, если $a \leqslant 4$, $b \leqslant 5$, $c \leqslant 7$?

205. Найдите высоту и радиус основания цилиндра, имеющего наибольшую боковую поверхность из всех цилиндров, вписанных в конус с радиусом основания R и высотой H.

206. Найдите радиус основания цилиндра, имеющего наибольший объём из всех вписанных в шар радиусом R.

207. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке L:

1) $y = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}\ln x$, $L = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$;

2) $y = x + \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 2x + 1)}$, $L = \left[-4; -\frac{5}{4}\right]$;

3) $y = 1 + 4\sin x - 2x$, $L = [0; \pi]$.

208. * Найдите большее из чисел a и b, если:

1) $a = e^{\frac{1}{e}}$, $b = \pi^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $a = e^{\pi}$, $b = \pi^{e}$.

209. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N, которые лежат на графиках функций:

1) $y = x + 5$ и $y = 4x - x^2$;

2) $y = x^2 + 1$ и $y = \sqrt{x - 1}$;

3) $y = e^x$ и $y = \ln x$.

210. В арифметической прогрессии шестой член равен 3, а разность прогрессии больше 1. Какова должна быть разность этой прогрессии, чтобы произведение первого, четвёртого и пятого её членов стало наибольшим?

211. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (м), где t (с) — время.

1) В какой момент времени t скорость движения точки будет наибольшей?

2) Какова величина этой наибольшей скорости?

212. Лампа висит над центром круглого стола радиусом R. При какой высоте лампы над столом освещённость тетради, лежащей на краю стола, будет наилучшей (освещённость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

213. Энергия, отдаваемая электрическим элементом, определяется из равенства $P = \frac{E^2R}{(R + r)^2}$, где E и r — постоянные величины. При каком соотношении между R и r величина P максимальна?

214. Нужно огородить проволочной сеткой длиной a прямоугольный участок, прилегающий к стене. Найдите размеры участка, при которых его площадь будет наибольшей.

215. Требуется изготовить из жести открытый цилиндрический сосуд вместимостью 2 л. Какой должна быть высота сосуда, чтобы расход жести был наименьшим?

216. Какими должны быть размеры цилиндрической консервной банки для того, чтобы она имела максимальный объём при расходе S м^2 жести на её изготовление?

217. Из круглого бревна диаметром d нужно вырезать балку одинакового по всей длине прямоугольного сечения. Зная, что сопротивление на сжатие пропорционально площади сечения, определите, каковы должны быть стороны прямоугольного сечения, чтобы сопротивление на сжатие было наибольшим.

218. К реке, имеющей ширину a, подходит под прямым углом канал шириной b. Какую наибольшую длину может иметь судно, вошедшее из реки в канал (осадкой судна и его шириной пренебречь)?

219. Коридор шириной 2 м и высотой 3 м поворачивает под прямым углом. Какова наибольшая длина деревянного бруса, который можно пронести по этому коридору?

220. Стоимость плавания корабля в зависимости от времени определяется формулой $C(t) = (a + bv^3)t$, где a и b — постоянные, v — скорость корабля, а t — время движения (первое слагаемое связано с расходом на амортизацию и содержание команды, а второе — с расходом топлива). При какой скорости судно пройдёт расстояние s с наименьшими затратами?

221. Два самолёта летят в одной плоскости и прямолинейно с одинаковой скоростью v (км/ч). В некоторый момент времени один самолёт оказался в точке пересечения линий движения, а второму до неё осталось a (км). Через какое время после этого расстояние между самолётами окажется наименьшим и чему оно будет равно, если направления движения самолётов образуют угол в $120°$?

! Контрольные вопросы и задания

1. В чём различие между понятиями максимума и наибольшего значения, минимума и наименьшего значения? В каких случаях наименьшее значение функции не является её минимумом? Нарисуйте график функции, у которой максимум меньше наибольшего значения, а минимум равен наименьшему значению.

2. Докажите, что если функция, имеющая непрерывную производную, имеет единственный экстремум, являющийся максимумом, то он совпадает с наибольшим значением этой функции.

3. Приведите пример функции, наибольшее значение которой можно найти без помощи производной.

4. Найдите наименьшее из значений, которые принимает функция $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

11. Вторая производная

Для отыскания промежутков монотонности и экстремумов вы находили производную функции и выясняли, на каких промежутках её значения положительны, отрицательны, в каких точках она обращается в нуль или не существует. Полученные результаты, в частности, помогали при построении графиков функций. Оказывается, что важную информацию о графике функции можно получить, исследуя не только значения, но и характер изменения производной, т. е. где она возрастает или убывает и где обращается в нуль. Поскольку производная функции сама является функцией, естественно при этом исследовании использовать её производную.

Производная от первой производной функции $y = f(x)$ называется ***второй производной функции*** $y = f(x)$ и обозначается с помощью двух штрихов:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

В этом пункте речь пойдёт о функциях, имеющих вторую производную.

График функции, изображённый на рисунке 75, располагается над любой из проведённых к нему касательных, а на рисунке 76 — под любой из них. Говорят, что первая кривая **вогнута**, а вторая **выпукла**.

Можно заметить, что при увеличении абсциссы точки касания угловой коэффициент касательной к вогнутой кривой увеличивается, а к выпуклой кривой уменьшается.

Поскольку угловой коэффициент касательной является производной функции, можно сказать, что на промежутке,

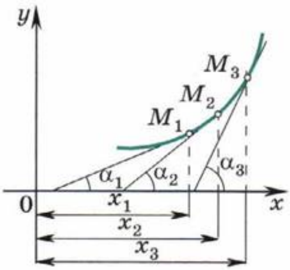


Рис. 75

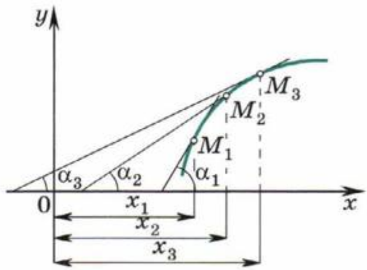


Рис. 76

где производная возрастает, график функции вогнутый, а на промежутке убывания производной он выпуклый. Связывая промежутки монотонности первой производной со знаком второй производной, можно сформулировать определения вогнутой и выпуклой функций.

> На промежутке, где вторая производная принимает только положительные [отрицательные] значения, ***функция вогнута*** **[*выпукла*]**.

На одних промежутках функция может быть выпуклой, а на других — вогнутой. Соответствующие участки её графика разделяются ***точками перегиба***. Касательная к графику функции в точке перегиба пересекает его (рис. 77). Понятно, что в точке перегиба вторая производная обращается в нуль либо не существует[1]. Так, начало координат является точкой перегиба знакомого

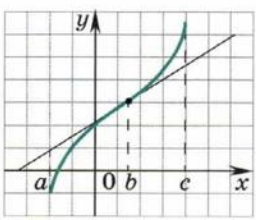


Рис. 77

вам графика функции $y = \sqrt[3]{x}$, а ни первой, ни тем более второй производной при $x = 0$ у этой функции нет. На рисунке 77 точка перегиба $x = b$ разделяет промежутки выпуклости $(a; b)$ и вогнутости $(b; c)$.

[1] Обратное утверждение неверно. Так, например, вторая производная функции $y = x^4$ при $x = 0$ обращается в нуль, а сама функция всюду вогнута. Чтобы был перегиб, вторая производная при переходе через соответствующую точку должна изменить свой знак.

Пример 1. Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$, а также точки перегиба её графика.

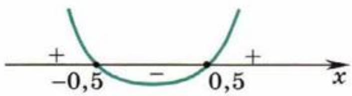


Рис. 78

Р е ш е н и е. Найдём вторую производную данной функции:

$$y'' = (4x^3 - 3x - 4)' = 12x^2 - 3.$$

Найдём нули второй производной и промежутки её знакопостоянства: $y'' = 0$: $12x^2 - 3 = 0$, $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0{,}5$ (рис. 78).

Вторая производная положительна на $(-\infty; -0{,}5)$ и на $(0{,}5; +\infty)$, отрицательна на $(-0{,}5; 0{,}5)$ и обращается в нуль в точках $-0{,}5$ и $0{,}5$. Следовательно, данная функция вогнута на $(-\infty; -0{,}5]$ и на $[0{,}5; +\infty)$, выпукла на $[-0{,}5; 0{,}5]$, а её точки перегиба имеют абсциссы $-0{,}5$ и $0{,}5$.

▼ **Пример 2.** Сравнить значения выражений

$$\cos^3 1 + \cos^3 1{,}4 \text{ и } \cos^3 1{,}05 + \cos^3 1{,}35.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим на интервале $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, которому принадлежат аргументы косинусов, функцию $y = \cos^3 x$. На этом интервале функция убывает, так как её производная $y' = -3\cos^2 x \sin x$ отрицательна.

Найдём вторую производную:

$$y'' = 6\cos x \cdot \sin^2 x - 3\cos^3 x = 3\cos x(2\sin^2 x - \cos^2 x).$$

На рассматриваемом интервале $y'' > 0$, значит, функция y вогнута. По теореме Лагранжа получаем:

$$\frac{y(1) - y(1{,}05)}{1 - 1{,}05} = y'(a) \quad \text{и} \quad \frac{y(1{,}35) - y(1{,}4)}{1{,}35 - 1{,}4} = y'(b),$$

где a — некоторое число из интервала $(1; 1{,}05)$, а b — из интервала $(1{,}35; 1{,}4)$. В силу возрастания производной

$$y'(a) < y'(b), \text{ т. е. } \frac{y(1) - y(1{,}05)}{-0{,}05} < \frac{y(1{,}35) - y(1{,}4)}{-0{,}05} \text{ и}$$

$$y(1) - y(1{,}05) > y(1{,}35) - y(1{,}4).$$

Отсюда $\cos^3 1 + \cos^3 1{,}4 > \cos^3 1{,}05 + \cos^3 1{,}35$. △

В окрестности точки экстремума функция обычно или выпукла (максимум), или вогнута (минимум), поэтому вторую производную можно использовать при поиске экстремумов.

Если в критической точке вторая производная положительна [отрицательна], то функция в этой точке имеет ***минимум*** [***максимум***].

Пример 3. Найти наименьшее значение функции $y = x\ln x - x\ln 5$ на отрезке $[1; 5]$.

Решение. Найдём критические точки данной функции, принадлежащие отрезку $[1; 5]$. $y' = \ln x + 1 - \ln 5$.

$$y' = 0: \ \ln x = \ln 5 - 1, \ x = \frac{5}{e}.$$

Поскольку $1 < \frac{5}{e} < 5$, критическая точка принадлежит отрезку $[1; 5]$. Выясним, какой знак в найденной точке у второй производной: $y'' = (\ln x + 1 - \ln 5)' = \frac{1}{x}$, $y''\left(\frac{5}{e}\right) = \frac{e}{5} > 0$.

Оказалось, что $x = \frac{5}{e}$ — точка минимума. Поскольку это единственная точка экстремума, то непрерывная функция $y = x\ln x - x\ln 5$ принимает в ней своё наименьшее значение:

$$\min_{[1;\,5]} y = \frac{5}{e}\ln\frac{5}{e} - \frac{5}{e}\ln 5 = \frac{5}{e}\,(\ln 5 - 1 - \ln 5) = -\frac{5}{e}.$$

Ответ: $-\frac{5}{e}$.

Нельзя обойти вниманием физический смысл второй производной. Пусть точка M движется по прямой с выбранным на ней началом отсчёта — точкой O. Расстояние от начала отсчёта до точки M в каждый момент времени $s(t)$ обозначим буквой s. Тогда движение точки M будет описываться функцией $s = s(t)$. Первая производная функции s, как вы знаете, выражает скорость движения $v(t)$, а вторая производная (скорость изменения скорости) является ускорением.

$$\boldsymbol{s''(t) = v'(t) = a(t).}$$

Пример 4. Найти ускорение тела, движущегося прямолинейно по закону $s(t) = 3t^2 - \ln t^2$ (м), где t (с) — время движения, через 2 с после начала движения.

Решение. Ускорение равно второй производной:

$$a(t) = (3t^2 - \ln t^2)'' = \left(6t - \frac{2}{t}\right)' = 6 + \frac{2}{t^2},$$

$$a(2) = 6 + \frac{2}{4} = 6{,}5.$$

Ответ: 6,5 м/с^2.

Рассмотрим теперь колебания груза, прикреплённого к пружине (рис. 79).

Груз скользит по стержню под действием силы сжатия пружины, которая пропорциональна (с учётом знака) отклонению $y(t)$ от положения равновесия (силой трения в этой задаче пренебрегаем):

$$F = -ky, \text{ где } k > 0.$$

По закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение:

$$F = ma = my''.$$

Имеем:

$$my'' = -ky.$$

В этом уравнении неизвестным является сама функция $y(t)$. Поскольку она выражается через свои производные, уравнение называют *дифференциальным*.

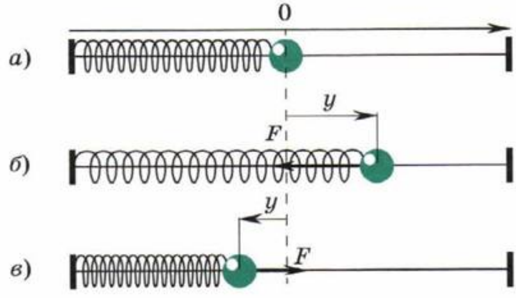


Рис. 79

Решению дифференциальных уравнений посвящён целый раздел математики — с ним вы познакомитесь в вузе. Что касается данного уравнения, его решение можно представить в виде функции

$$y = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

Говорят, что тело, движение которого описывается такой функцией, совершает *гармонические колебания*. Число A показывает предельное отклонение от положения равновесия — его называют *амплитудой*. Число ω называют *частотой*, через него легко выразить *период* гармонических колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Число φ зависит от выбора начального момента отсчёта — его называют *начальной фазой*.

Упражнения

222. Найдите вторую производную функции $f(x)$ и вычислите её значения:

1) $f(x) = x^2 \ln x + \cos 2x$, $f''(1)$, $f''(\pi)$;
2) $f(x) = \sin\dfrac{x}{3} + \ln x^2$, $f''(3)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

223. Найдите промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции:

1) $y = x^3$;
2) $y = (x+1)^4$;
3) $y = 3x^2 - x^3$;
4) $y = x + \sqrt[3]{x^5}$;
5) $y = x + 2\cos x$;
6) $y = x - 2\sin x$.

224. Узнайте, выпукла или вогнута функция

$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ в точках: 1) $x = 1$; 2) $x = 2$.

225. Постройте графики функций, проведя исследование с помощью первой и второй производных:

1) $y = \sqrt{1 + x^2}$;
2) $y = x + \sin x$;
3) $y = e^{-x^2}$;
4) $y = \ln(1 + x^2)$.

226. Исследуйте на выпуклость функции $y = x^{100}$ и $y = \sqrt[2014]{x}$. Используйте полученные результаты для сравнения чисел:

1) $\frac{3^{100}+2^{100}}{2}$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^{100}$; 2) $\frac{\sqrt[2014]{0,3}+\sqrt[2014]{0,7}}{2}$ и $\sqrt[2014]{0,5}$.

227. Сравните значения выражений

$$\sin^3 0,1+\sin^3 0,5 \text{ и } \sin^3 0,2+\sin^3 0,4.$$

228. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке L:

1) $y=2x^3-3x^2-12x-2$, $L=[-2;\ 1]$;

2) $y=\frac{2}{x+1}+\frac{x}{2}$, $L=[0;\ 2,5]$;

3) $y=\frac{2}{1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$, $L=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $y=-\frac{3}{\sqrt{2x^2-x-1}}$, $L=[2;\ 3]$.

229. Найдите наименьшее значение функции y на отрезке L:

1) $y=2x\ln x-x\ln 49$, $L=[1;\ 4]$;

2) $y=\frac{1}{2}x\ln x-x\ln 2$, $L=[0,5;\ 2]$.

230. Докажите, что функция $y=\begin{cases} x+x^2\sin\frac{5}{x} \text{ при } x\neq 0 \\ 0 \text{ при } x=0 \end{cases}$

не имеет второй производной в точке $x=0$.

231. Найдите скорость и ускорение тела, движущегося прямолинейно по закону $s(t)$ в указанные моменты времени t:

1) $s(t)=2t^3-3t+4$ (м), $t=2$ с;

2) $s(t)=3\cos\frac{\pi t}{3}$ (м), $t=1$ с.

232. Тело движется по закону $s(t)=0,5t^4-5t^3+12t^2-1$. В какие моменты времени ускорение тела равно нулю?

233. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)=\sqrt[3]{t^2}$. Докажите, что его ускорение обратно пропорционально квадрату пройденного расстояния.

234. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1(t)=2t^3-5t^2-3t$ и $s_2(t)=2t^3-3t^2-11t+7$.

Найдите ускорение точек в момент, когда равны их скорости (расстояние измеряется в метрах, время в секундах).

235. Пуля, попав в твёрдое тело, движется в нём по закону $s(t) = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0t)$, где v_0 — скорость, с которой пуля входит в тело, k — постоянная положительная величина. Найдите закон изменения ускорения движения пули.

236. Тело, имеющее массу m, движется прямолинейно по закону $s = at^2 + bt + c$, где a, b и c — постоянные величины. Докажите, что сила, действующая на это тело, постоянна.

237. Найдите скорость и ускорение, которые имеет точка, движущаяся по закону:

1) $s(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$; 2) $s(t) = 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$,

в момент времени $t = 1$.

238. Найдите силу F, действующую на тело массой m, которое движется прямолинейно по закону, заданному уравнением $s(t)$ в момент времени t:

1) $s(t) = \sin 2t$, $t = \frac{\pi}{8}$; 2) $s(t) = e^{2t}$, $t = 0$.

239. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $s(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, где A — амплитуда, ω — частота, α — начальная фаза колебаний. Составьте формулы скорости и ускорения движения точки.

240. Определите силу, под действием которой тело массой m совершает гармонические колебания по закону

$$s(t) = A\cos(\omega t + \alpha).$$

241. Постройте график гармонических колебаний, заданных формулой:

1) $s(t) = \frac{1}{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $s(t) = -3\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

242. Докажите, что функция y является решением дифференциального уравнения гармонических колебаний:

1) $y = -4\sin(2x + 3)$, $y'' + 4y = 0$;

2) $y = 3{,}8\cos(0{,}6x - 10)$, $y'' + 0{,}36y = 0$.

243. Постройте график функции, определяя её асимптоты, экстремумы и точки перегиба:

1) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$;

2) $y = \frac{1}{x^2 - x - 2}$;

3) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$;

4) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Покажите на графике убывающей дифференцируемой вогнутой функции, что угловые коэффициенты касательных к нему увеличиваются при увеличении абсциссы точки касания.

2. Сделайте эскиз графика какой-нибудь функции, производная которой в точке перегиба:

1) равна нулю;

2) положительна;

3) отрицательна;

4) не существует.

3. Исследуйте на монотонность, выпуклость и вогнутость функцию $y = x^4 - 6x^2 + 1$ и постройте её график.

4. Докажите, что если точка движется прямолинейно по закону $s(t) = ae^t + be^{-t}$, то её ускорение равно пройденному пути.

? Вопросы для самооценки

1. Оцените результаты изучения этой главы. Довольны ли вы ими?

2. Что нового вы узнали в этой главе?

3. Как могут пригодиться вам эти знания в повседневной жизни?

4. Какие задания в этой главе были для вас самыми трудными? Почему?

5. Использовали ли вы при выполнении заданий дополнительные источники: справочники, пособия, интернет-ресурсы?

6. Обращались ли вы за помощью к одноклассникам, родителям, учителю?

7. Проверяли ли вы свои знания и умения по контрольным вопросам и заданиям к пункту?

8. Пользовались ли вы разделами «Ответы», «Советы» и «Решения», предметным указателем?

Глава 4

ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

В предыдущих двух главах вы находили производные различных функций. В этой главе рассматривается обратная задача — вы научитесь по данной производной находить функцию, от которой она была взята, и познакомитесь с некоторыми ситуациями, в которых применяется это умение. В пункте 12 речь пойдёт о задачах, которые приводят к интегралам как суммам бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, а пункт 13 научит вас вычислять некоторые из этих интегралов.

12. Площадь криволинейной трапеции

Фигура $ABCD$ на рисунке 80 снизу ограничена осью абсцисс, сверху — графиком функции $y = f(x)$, а слева и справа — параллельными прямыми $x = a$ и $x = b$. Параллельность сторон AD и BC вызывает ассоциации с трапецией, отличие лишь в стороне DC: у трапеции это отрезок, а у фигуры на рисунке — часть графика функции $y = f(x)$.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линиями: $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и $y = f(x)$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$ и принимающая на нём только неотрицательные значения.

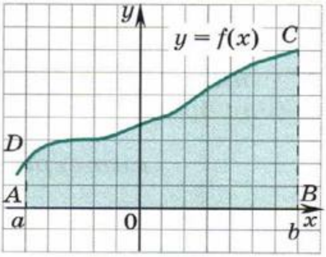


Рис. 80

Рисунки 81—83 иллюстрируют способ приближённого вычисления площади криволинейной трапеции: разбиение на несколько криволинейных трапеций, замена их прямоугольниками, нахождение высот, а затем и площадей этих прямоугольников.

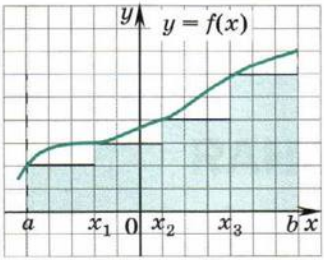


Рис. 81

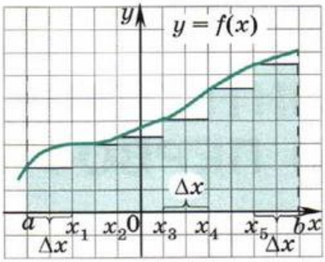


Рис. 82

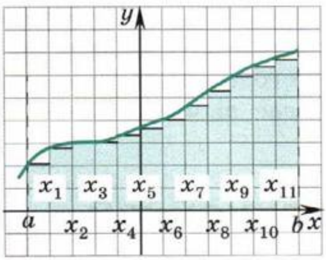


Рис. 83

Так, для разбиения на рисунке 82, используя для равных оснований прямоугольников обозначение Δx, получим:

$$S_{ABCD} \approx f(a) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \\ + f(x_3) \cdot \Delta x + f(x_4) \cdot \Delta x + f(x_5) \cdot \Delta x.$$

При увеличении числа частей n, на которые разбивается трапеция, погрешность приближения уменьшается, и её можно сделать как угодно малой, взяв n достаточно большим. Поскольку при увеличении n значение $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ стремится к нулю, можно записать:

$$S_{ABCD} = \lim_{\Delta x \to 0} (f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x).$$

Сумму, стоящую под знаком предела, называют ***интегральной***, концы отрезка $[a; b]$ — границами (или пределами) интегрирования, а сам предел называют ***интегралом*** и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

(Читают: *«интеграл от a до b эф от икс дэ икс»*)[1].

[1] Знак интеграла, представляющий собой удлинённую букву S, был введён Лейбницем в 1686 г. Термин «интеграл» от латинского слова integer — «целый» (с помощью интеграла находится площадь целой фигуры) предложил И. Бернулли, сотрудник Лейбница. Определение интеграла как предела суммы принадлежит Б. Риману, поэтому интегральную сумму иногда называют *римановой*.

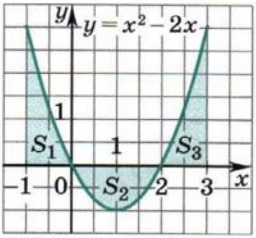


Рис. 84

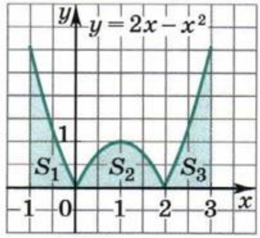


Рис. 85

Таким образом,

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Выразить через интегралы площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 84.

Решение. Разрежем данную фигуру на три части, и ту часть, которая расположена под осью абсцисс, отобразим симметрично этой оси в верхнюю полуплоскость (рис. 85). Искомая площадь равна сумме площадей трёх криволинейных трапеций:

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

Каждая из площадей криволинейных трапеций записывается как интеграл:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\,dx, \quad S_2 = \int_{0}^{2} (2x - x^2)\,dx, \quad S_3 = \int_{2}^{3} (x^2 - 2x)\,dx.$$

Ответ: $S = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\,dx + \int_{0}^{2} (2x - x^2)\,dx + \int_{2}^{3} (x^2 - 2x)\,dx.$

Примечание. Фигура на рисунке 85 сама является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции $y = |x^2 - 2x|$, и её площадь равна интегралу:

$$S = \int_{-1}^{3} |x^2 - 2x|\,dx.$$

Представление искомой величины в виде суммы с последующим переходом к пределу встречается довольно часто. Рассмотрим ещё одну задачу, приводящую к интегралу.

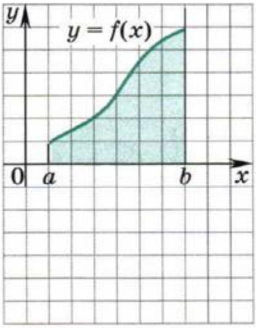


Рис. 86

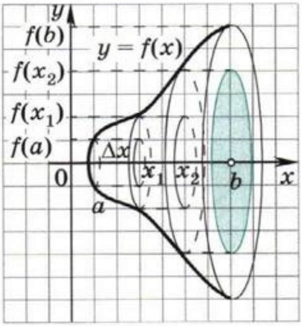


Рис. 87

Пример 2. Найти объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции (рис. 86) вокруг оси абсцисс[1].

Р е ш е н и е. Как и в задаче с площадью криволинейной трапеции, «нарежем» данное тело вращения слоями толщиной Δx и заменим каждый слой цилиндром, обрезая неровности по краям (рис. 87).

Используя формулу объёма цилиндра: $V = \pi R^2 h$, составим интегральную сумму и выразим объём данного тела вращения как её предел:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} (\pi f^2(a)\,\Delta x +$$

$$+ \pi f^2(x_1)\,\Delta x + \pi f^2(x_2)\,\Delta x + \ldots$$

$$\ldots + \pi f^2(x_{n-1})\,\Delta x) = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_{\text{тела вращения}} = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx.}}$$

[1] В 1612 г., готовясь к своей свадьбе, И. Кеплер заинтересовался вопросом определения вместимости винных бочек, и уже через три года вышла его работа «Новая стереометрия винных бочек», в которой задача вычисления объёмов тел вращения была решена.

Упражнения

244. Какие из фигур на рисунке 88 являются криволинейными трапециями?

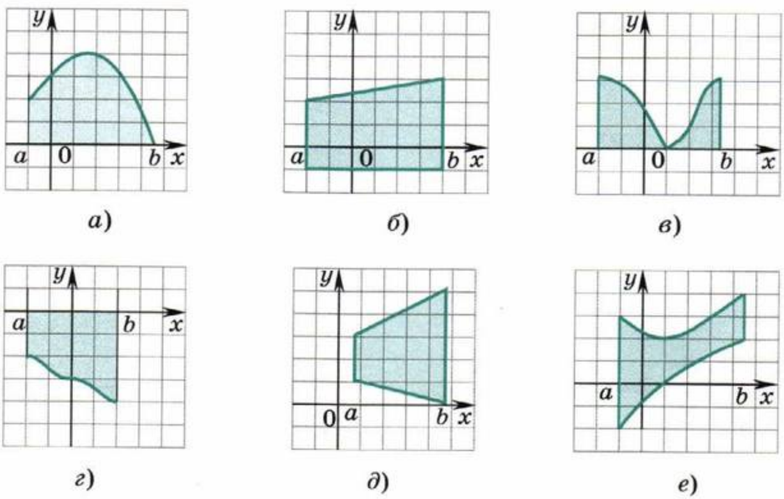


Рис. 88

245. В каких случаях полученная в результате преобразования фигура по-прежнему будет криволинейной трапецией, если криволинейная трапеция:

1) сдвигается:

а) влево;
б) вправо;
в) вниз;
г) вверх;

2) растягивается в k раз:

а) от оси абсцисс;
б) от оси ординат?

Изменится ли её площадь?

246. Выразите площадь S фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 89), с помощью интеграла. Как вы думаете, почему на рисунке не изображена ось абсцисс?

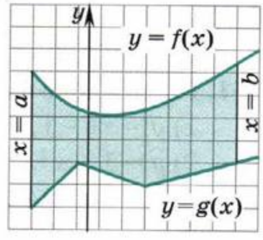


Рис. 89

247. Запишите площадь заштрихованных фигур с помощью интеграла (рис. 90).

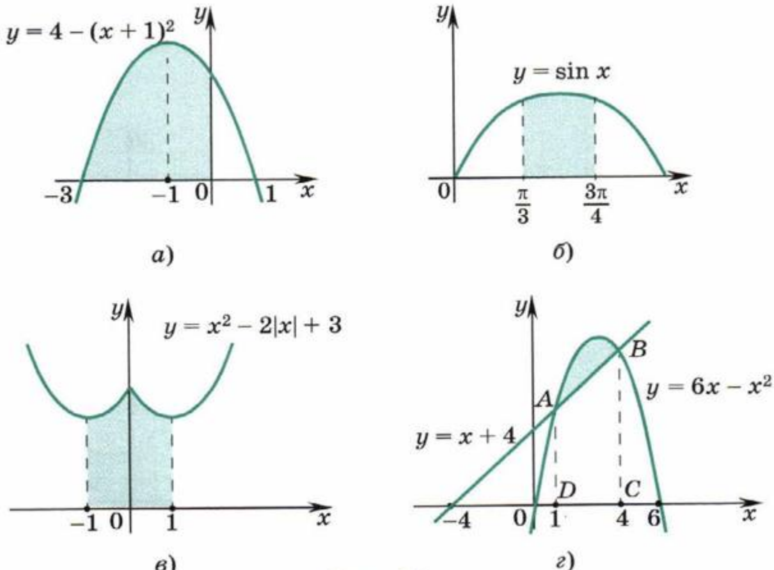


Рис. 90

248. Изобразите фигуру, площадь которой равна:

1) $\int\limits_{-2}^{0} (-x^3)\, dx$;

2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$;

3) $\int\limits_{1}^{4} dx$;

4) $\int\limits_{1}^{e} \ln x\, dx$.

249. Выразите площади фигур, изображённых на рисунке 91 через интегралы.

250. Запишите формулы для вычисления площадей фигур на рисунке 92 с помощью интегралов.

251. Изобразите фигуру, ограниченную линиями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$;

2) $y = 1 - x^2$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$;

3) $y = 2x^2 - 4x + 1$, $y = 6 - 2x - x^2$;

4) $y = 2^x$, $y = \sqrt{18 - x}$, $x = -1$, $y = 0$,

и выразите её площадь с помощью интеграла.

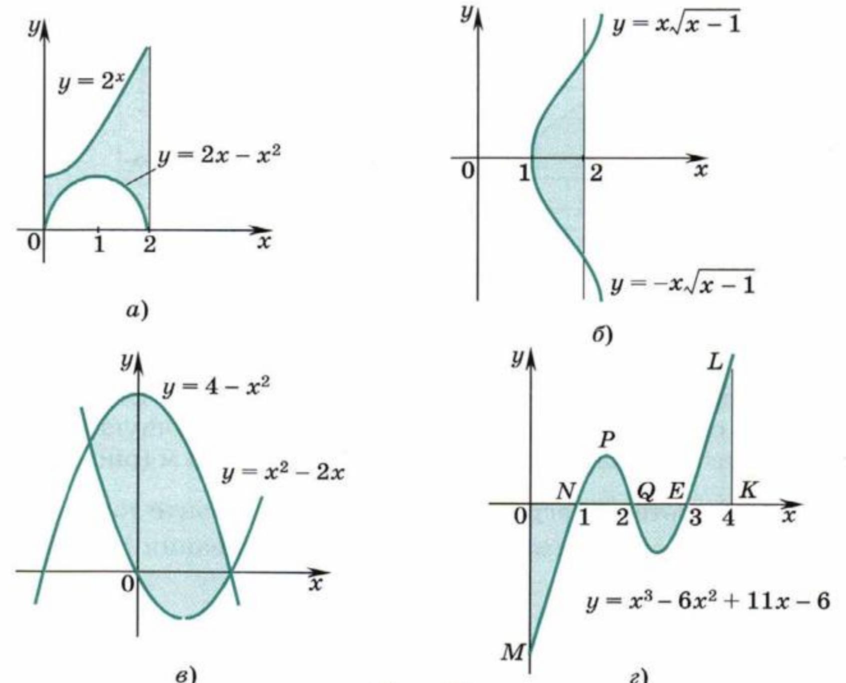


Рис. 91

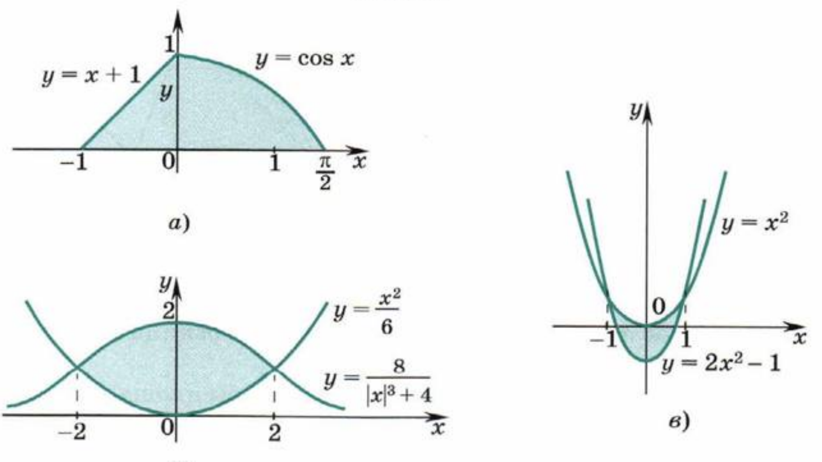
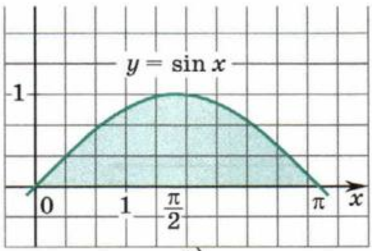


Рис. 92

252. 1) Выразите через интегралы объёмы тел, образованных вращением заштрихованных на рисунке 93 фигур вокруг оси абсцисс.



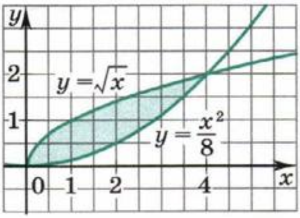


Рис. 93

2) Найдите объёмы тел, образованных вращением этих фигур вокруг оси ординат.

253.* Составьте интегральную сумму и выразите как интеграл силу давления воды на плотину, имеющую форму треугольника с основанием a м и высотой h м (рис. 94).

254.* Составьте интегральную сумму и выразите как интеграл объём пирамиды с площадью основания S и высотой H (рис. 95).

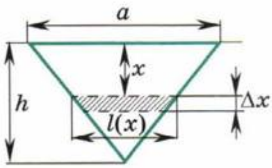


Рис. 94

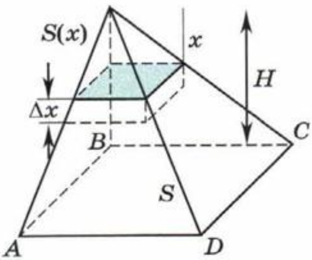


Рис. 95

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое интегральная сумма, интеграл, границы интегрирования?
2. Какие условия должны выполняться, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, можно было выразить интегралом $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$?
3. Выразите с помощью интегралов объёмы конусов, которые получаются в результате вращения прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2 сначала вокруг меньшего, а затем вокруг большего катета.

13. Первообразная

Будем теперь рассматривать площадь фигуры под кривой $y = f(x)$ как функцию $S(x)$. Действительно, каждому значению x из промежутка $(a; b]$ (рис. 96) соответствует площадь криволинейной трапеции $AXYD$. Приращению Δx (рис. 97) соответствует приращение ΔS — площадь заштрихованной криволинейной трапеции, которую и здесь при стремлении Δx к нулю можно заменить площадью прямоугольника $f(x)\,\Delta x$.

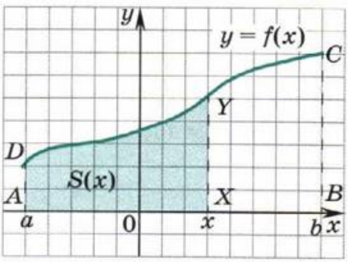


Рис. 96

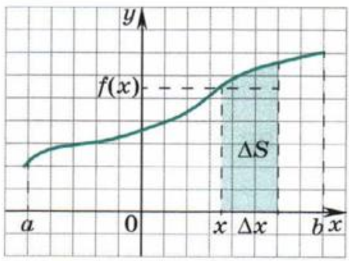


Рис. 97

Приращение функции при этом превратится в её дифференциал: $dS = f(x)\,dx$. Значит, $S'(x) = f(x)$.

Оказалось, что введённая нами функция $S(x)$ имеет производную, равную функции $f(x)$, чей график ограничивает криволинейную трапецию сверху.

В математике для таких функций используют специальный термин.

Функция $F(x)$ называется ***первообра́зной*** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Для некоторых функций первообразную легко «угадать», так, например, любая постоянная функция является первообразной для функции $f(x) = 0$. Можно доказать, что других первообразных у этой функции нет.

▼ Для доказательства достаточно заметить, что если дифференцируемая функция не является постоянной, то на промежутке, в концах которого её значения различны, есть точка, где по теореме Лагранжа производная отлична от нуля. Следовательно, эта функция не является первообразной функции $f(x) = 0$. △

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для непрерывной функции $f(x)$ на промежутке L. То есть на этом промежутке $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Разность функций $F(x)$ и $G(x)$ является первообразной для разности их производных, которая равна нулю: $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Значит, разность функций $F(x) - G(x)$ постоянна, а это позволяет сделать следующий вывод.

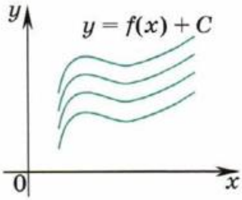


Рис. 98

Любые две первообразные одной функции отличаются на константу: $F(x) = G(x) + C$, где C — константа.

Графики первообразных получаются один из другого сдвигом вдоль оси ординат (рис. 98).

Пример 1. Найти первообразную функции $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, график которой проходит через точку $M(-1; 4)$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна при всех x, кроме $x = 0$, поэтому она имеет первообразную либо на промежутке $(-\infty; 0)$, либо на промежутке $(0; +\infty)$. Однако отрицательность абсциссы точки M говорит о том, что речь идёт о промежутке $(-\infty; 0)$. Поскольку

$$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2} = (-1) \cdot x^{-1-1} = (x^{-1})',$$

то $G(x) = x^{-1}$ является одной из первообразных функции f.

Пусть $F(x)$ — искомая первообразная, тогда, во-первых, $F(x) = x^{-1} + C$, и, во-вторых, из условия принадлежности точки M её графику: $F(-1) = 4$. Имеем: $(-1)^{-1} + C = 4$, $C = 5$ и, наконец, $F(x) = x^{-1} + 5$.

Ответ: $F(x) = x^{-1} + 5$, где $x < 0$.

Примечание. Указание в ответе на отрицательность значений аргумента найденной функции обязательно. Его отсутствие привело бы к рассмотрению функции $F(x)$ на естественной области определения $x \neq 0$, которая не может служить областью определения первообразной, так как не является промежутком.

Вернёмся к ситуации, изображённой на рисунке 96. При $x = a$ криволинейная трапеция $AXYD$ *вырождается* в отрезок, и её площадь обращается в нуль: $S(a) = 0$. При $x = b$ значение функции $S(x)$ даёт площадь криволинейной трапеции $ABCD$. Однако для вычисления площади криволинейной трапеции можно использовать и любую другую первообразную функции $f(x)$:

$$S_{ABCD} = F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) =$$
$$= S(b) - S(a) = S(b).$$

Таким образом, *площадь криволинейной трапеции* S_{ABCD}, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, равна приращению *любой* первообразной этой функции, соответствующему изменению аргумента от $x = a$ до $x = b$.

$$\boxed{S_{ABCD} = F(b) - F(a)}$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = \pi$.

Решение. Данная фигура (рис. 99) — криволинейная трапеция.

Для вычисления её площади найдём какую-нибудь первообразную функции $f(x) = \sin x$. И в этом случае её нетрудно угадать, умножив известную формулу $(\cos x)' = -\sin x$ на -1: $-(\cos x)' = (-\cos x)' = \sin x$. Значит, $F(x) = -\cos x$ — первообразная для функции $f(x) = \sin x$. Теперь можно вычислить искомую площадь как приращение первообразной:

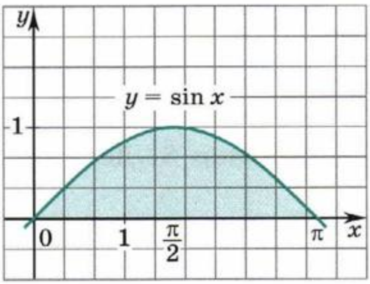


Рис. 99

$$S = -\cos(\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Ответ: 2.

Примечание. Иногда для сокращения записей удобно использовать символ подстановки: $\Big|_a^b$ (читается: «*подстановка от a до b*»).

$$\boxed{F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

В предыдущем пункте было получено выражение для площади криволинейной трапеции в виде интеграла, в этом пункте та же площадь оказалась равной приращению первообразной. Объединение этих результатов приводит нас к важной формуле, полученной Ньютоном и Лейбницем[1].

Формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Интеграл есть приращение первообразной.

Формулу Ньютона—Лейбница используют и в случаях, когда $f(x)$ принимает отрицательные значения, и даже когда $a > b$. Для этого, правда, нужно уметь находить первообразные. Нахождение первообразных называют *интегрированием*. Мы рассмотрим наиболее простые случаи интегрирования, непосредственно вытекающие из формул и правил дифференцирования.

В примерах 1 и 2 вы уже видели, как из известных формул производных получают первообразные. Так же получены все первообразные, которые называют табличными.

Доказать, что одна функция является первообразной по отношению к другой, проще всего с помощью дифференцирования предполагаемой первообразной.

Пример 3. Доказать, что $F(x) = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ — первообразная для функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$.

[1] *Исаак Ньютон* (1643—1727) — великий английский физик и математик, создавший теоретические основы механики, астрономии и математики. В 1665 г. Ньютон окончил Кембриджский университет. Разразившаяся в Англии эпидемия чумы заставила его в течение двух лет после университета жить на ферме. Эти «чумные» каникулы оказались для Ньютона очень плодотворными — за эти два года он сделал почти все свои основные открытия.

Уже говорилось о Готфриде Вильгельме Лейбнице (1646—1716) как об отце математического анализа, однако кроме математики он занимался физикой, инженерным делом (изобрёл арифмометр), языкознанием, историей. Именно Лейбниц ввёл в употребление знак умножения «·».

Доказательство. Вынося числовой множитель за знак производной и используя формулы производной арктангенса и сложной функции, получаем:

$$F'(x)=\left(\frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2+x^2}=f(x).$$

Для любого x из промежутка $(-\infty;\ +\infty)$ выполняется равенство $F'(x)=f(x)$, значит, $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, что и требовалось доказать.

Вместе с первообразными, приведёнными в таблице, будем использовать три правила интегрирования, в справедливости которых легко убедиться с помощью дифференцирования.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

1. Функция $F(x)\pm G(x)$ — первообразная функции $f(x)\pm g(x)$.

2. Функция $G(x)=kF(x)$ — первообразная функции $g(x)=kf(x)$.

3. Функция $G(x)=\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная функции $g(x)=f(kx+b)$.

Таблица первообразных

№	Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$ функции $f(x)$
1	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln x$ или $\ln(-x)$
3	e^x	e^x
4	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
5	$\frac{1}{x\ln a}$	$\log_a x$ или $\log_a(-x)$
6	$\sin x$	$-\cos x$
7	$\cos x$	$\sin x$
8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$
9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x$

Окончание табл.

№	Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$ функции $f(x)$
10	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ или $-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$
11	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ или $-\arccos\frac{x}{a}$

Примечание. Область определения первообразной — промежуток. Об этом надо помнить, обращаясь к 1, 2, 5, 8 и 9-й строкам таблицы.

Пример 4. Найти все первообразные функции

$$f(x) = 3\cos x + \sqrt{3x-2}.$$

Решение. Применяя правила и таблицу первообразных, получим:

$$F(x) = 3\sin x + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{(3x-2)^3}}{\frac{3}{2}} + C = 3\sin x + \frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3} + C,$$

где C — любое число.

Интегрирование — процесс, обратный дифференцированию. Каждая строчка в таблице первообразных получена из соответствующей формулы производной, однако нахождение первообразных во многих случаях оказывается значительно сложнее, чем дифференцирование. Так, например, нет правила, позволяющего выражать первообразную частного через первообразные числителя и знаменателя, а правило интегрирования сложной функции ограничено случаем, когда внутренняя функция является линейной: $y = kx + b$. Заметим, что первообразная элементарной функции не всегда является элементарной, так, например, первообразную функции $y = \frac{1}{\ln x}$ нельзя записать как комбинацию конечного числа основных элементарных функций.

Упражнения

255. Проверьте, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$:

1) $F(x) = -\cos 2x - 5$, $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$;

2) $F(x) = x(\ln x - 1)$, $f(x) = \ln x$;

3) $F(x) = 2\ \mathrm{tg}\ 3x + 4x^2 + 2,\ f(x) = \dfrac{6}{\cos^2 3x} + 8x;$

4) $F(x) = \sqrt[5]{x^4} - e^{2x} - x + 7,\ f(x) = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}} - 2e^{2x} - 1;$

5) $F(x) = 3^{2x} - \sin 4x + \dfrac{7}{x} - 1,\ f(x) = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 - 4\cos 4x - \dfrac{7}{x^2};$

6) $F(x) = \log_5 2x + \sqrt{x} - 2,\ f(x) = \dfrac{2}{x \ln 5} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

256. Для какой из функций $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ функция $F(x)$ является первообразной:

1) $p(x) = 6(x^2 - 1),\ g(x) = 6x^2 - 6x + 1,\ q(x) = 6x(x - 1),$
$$F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1;$$

2) $p(x) = -2x + 3x^2,\ g(x) = -3x\left(\dfrac{4}{3} + x\right),\ q(x) = 3x^2 - 4x,$
$$F(x) = 3 - 2x^2 + x^3;$$

3) $p(x) = -4\sin x \cos x,\ g(x) = 4\sin x \cos x,\ q(x) = -\sin 2x,$
$$F(x) = -\cos 2x?$$

257.* Найдите функцию $f(x)$, первообразной которой является функция $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x = 0, \\ x + x^2 \sin \dfrac{5}{x} \text{ при } x \neq 0. \end{cases}$

Докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует.

258. По графику первообразной функции $F(x)$ (рис. 100) постройте график функции $f(x)$.

259. По графику функции $f(x)$ (рис. 101) постройте график её первообразной $F(x)$, который проходит через начало координат.

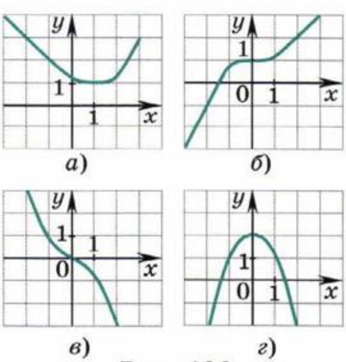


Рис. 100

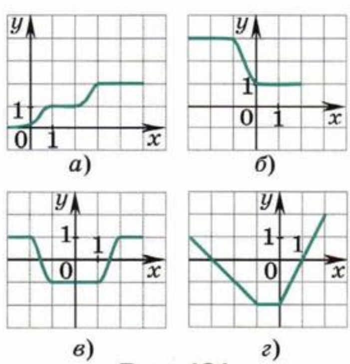


Рис. 101

260. Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через точку A:

1) $f(x) = \sin 2x,\ A\left(\dfrac{\pi}{4};\ 2\right)$;

2) $f(x) = \sqrt{x},\ A(4;\ 6)$;

3) $f(x) = e^{-3x},\ A\left(\ln 2;\ \dfrac{5}{24}\right)$;

4) $f(x) = \sin x - \cos x,\ A\left(\dfrac{\pi}{2};\ 1\right)$;

5) $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x},\ A(-1;\ 4)$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 3x},\ A\left(\dfrac{\pi}{12};\ -1\right)$.

261. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_0^1 (x+2)^2\,dx$;

2) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{(x+1)^2}$;

3) $\int\limits_3^{27} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

4) $\int\limits_0^{\pi} 2\sin^2 \dfrac{x}{2}\,dx$;

5) $\int\limits_1^2 (x^2 + x^{-2})\,dx$;

6) $\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \sin(1{,}5\pi + 0{,}5x)\,dx$;

7) $\int\limits_{\pi}^{\pi/4} (\sin 2x - \cos 2x)^2\,dx$;

8) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} (\cos 3x - \sin 3x)dx$.

262. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линиями:

1) $y = 3 - 2x - x^2,\ x = -3,\ x = 0$;

2) $y = \sin x,\ x = \dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{3\pi}{4}$;

3) $y = \dfrac{1}{x^2},\ x = \dfrac{1}{2},\ x = \dfrac{1}{3}$;

4) $y = \dfrac{x^2}{1+x},\ x = 2,\ x = 1$;

5) $y = x^2 - 4|x| + 5,\ x = -2,\ x = 4$;

6) $y = 1 + \sqrt{|x|},\ x = -1,\ x = 4$.

263. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)$ и $g(x)$:

1) $f(x) = 6x - x^2,\ g(x) = x + 4$;

2) $f(x) = x^3,\ g(x) = \sqrt{x}$;

3) $f(x) = \sin x$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$, $g(x) = \frac{2x}{\pi}$;

4) $f(x) = |\sin x|$, $g(x) = 0$, где $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

264. Напишите выражение для первообразных функции

$$f(x) = |x|.$$

265. Каждая из первообразных, о которых идёт речь в этом задании, определена на множестве всех действительных чисел. Верно ли, что:

1) любая первообразная нечётной непрерывной функции является чётной функцией;

2) любая первообразная чётной непрерывной функции является нечётной функцией;

3) у любой чётной непрерывной функции существует нечётная первообразная?

266. Найдите все первообразные функции:

1) $f(x) = 3x^2 + x^3$;

2) $f(x) = x^{-2} + \cos 2x$;

3) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 3x}$;

4) $f(x) = \cos^2 x$.

267. Найдите какую-нибудь первообразную функции $f(x)$, принимающую отрицательное значение в точке $x = m$:

1) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2$, $m = 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{x}{2} - 1$, $m = -4$.

268. Сравните с примером 1 настоящего пункта и решите задачу: найти все функции $f(x)$, имеющие производную $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, графики которых проходят через точку $M(-1; 4)$.

269. Найдите все функции $f(x)$, графики которых проходят через точку B, если:

1) $f'(x) = 4x^2 - 9x^{-2}$, $B(3; -2)$;

2) $f'(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{1}{x}$, $B(2; 1)$.

270. Найдите первообразную для функции $f(x)$, график которой касается прямой $g(x)$:

1) $f(x) = x + 3$, $g(x) = 0$;

2) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2x + 1$.

271. Прямая $y = ax + b$ касается каждой из парабол $f(x)$ и $g(x)$:
1) $f(x) = 5 - (x + 1)^2$ и $g(x) = 8 - (x - 2)^2$;
2) $f(x) = x^2 + 5x + 7$ и $g(x) = x^2 - x - 5$.
Найдите:
а) значения a и b;
б) координаты точек касания;
в) площадь фигуры, ограниченной этими параболами и касающейся их прямой.

272. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой:
1) $y = x^2 + 1$ и касательными к ней в точках с абсциссами 0 и 2;
2) $y = x^2 - 4x$ и касательными к ней, проходящими через точку $A\left(\frac{5}{2}; -6\right)$.

273. Найдите площадь каждой из фигур, на которые прямая $y = x + 3$ делит фигуру, ограниченную линиями $y = 2x^2$ и $y = 8$.

274. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, будет наименьшей?

275. Найдите наименьшее и наибольшее значения интеграла:
1) $\int_0^a \sin \frac{x}{2}\, dx$, $a > 0$; 2) $\int_0^a x(x - 2)\, dx$, $a > 0$.

276. Найдите пары чисел a и b, при которых функция $f(x) = a \sin \pi x + b$ удовлетворяет условиям:

$$f'(2) = 3, \int_0^2 f(x)\, dx = 4.$$

277. Материальная точка движется по координатной прямой со скоростью $v(t) = \sin 2t \cos 2t$. Найдите уравнение движения точки, если при $t = \frac{\pi}{4}$ её расстояние от начала координат равно 2.

278. Два тела начали движение одновременно из одной точки:
1) в одном направлении;
2) в противоположных направлениях.

Первое тело движется со скоростью $v_1(t) = 6t^2 + 2t$ (м/с), второе — со скоростью $v_2(t) = 4t + 5$ (м/с). На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

279. Найдите импульс тела массой 2 кг, движущегося с ускорением $a(t) = t^2 - 2t + 2$ (м/с^2), через 3 с после начала движения, если его начальная скорость равна 1 м/с.

280. Используя формулу среднего значения μ функции $f(x)$

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \text{ найдите:}$$

1) среднюю теплоёмкость бензина для температур, лежащих в интервале от $t_1 = 116$ °C до $t_2 = 218$ °C, если при постоянном давлении теплоёмкость бензина в зависимости от температуры t выражается формулой $C(t) = 0{,}2237 + 0{,}00102t$;

2) среднее значение силы переменного тока, изменяющегося по закону $I(t) = k \sin t$, где k — постоянная, $t \in [0; \pi]$.

281. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси x фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 2x$, $y = 0$, $x = 4$;
2) $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 4$;
3)○ $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$;
4)○ $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$;
5)● $y^2 = x$, $y = x^2$;
6)● $y^2 = 8x$, $y = x^2$.

282.● Выведите формулу объёма прямого кругового конуса с радиусом основания R и высотой H.

283.● Докажите, что объём шара радиусом R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

284.○ Найдите наибольший объём, который может иметь коническая воронка с образующей, равной l.

285.● Найдите размеры прямого кругового конуса наибольшего объёма, который вписан в шар радиусом R.

286.● Какой наибольший объём может быть у тела, образованного вращением равнобедренного треугольника с периметром $2p$ вокруг своего основания?

287. Найдите отношение высоты конуса к радиусу его основания, зная, что у него самый большой объём из возможных при его площади боковой поверхности.

288. Скорость поезда, идущего под уклон, изменялась по закону $v(t) = 15 + 0{,}2t$ (м/с). Вычислите длину уклона, зная, что поезд прошёл его за 20 с.

289. Найдите силу давления воды на плотину, имеющую форму треугольника, обращённого вершиной вниз, если основание треугольника 18 м, а его высота 10 м. (Атмосферное давление равно давлению столба воды высотой 10 м, а удельная плотность воды равна 1000 кг (м^3).

290. Пирамида Хеопса представляет собой правильную четырехугольную пирамиду высотой 147 м, в основании которой лежит квадрат со стороной 232 м. Найдите работу (в джоулях), затраченную при строительстве пирамиды, если плотность составляющих её блоков равна a (кг/м^3). (Наличием в пирамиде Хеопса внутренних помещений пренебречь.)

! Контрольные вопросы и задания

1. Какую функцию называют первообразной для функции $y = f(x)$? Чем может являться область определения первообразной?

2. Как убедиться в том, что функция $F(x)$ — первообразная для функции f? Является ли функция $F(x) = \ln|x|$ первообразной функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$?

3. Найдите по формуле Ньютона—Лейбница интеграл $\int\limits_{1}^{-1} (1 - x^3)\,dx$.

Глава 5

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Своё умение решать уравнения, неравенства и системы вы неоднократно демонстрировали в предшествующем курсе. В учебнике для 10 класса подробно рассматривались иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения. В этой главе будет немного повторения, но главное — это знакомство с некоторыми специальными приёмами, которые помогают при решении более трудных задач.

Алгебра создавалась и развивалась как наука о решении уравнений. Даже само слово «алгебра» является частью арабского названия часто используемого приёма при решении уравнений — переноса члена из одной части уравнения в другую с переменой его знака.

Наибольший интерес математиков привлекали так называемые *целые уравнения* с одной переменной, в левой части которых стоит целое выражение, а в правой — нуль.

Как вы знаете, любое целое выражение можно преобразовать в тождественно равный ему многочлен, поэтому можно сказать, что целое уравнение с одной переменной имеет вид $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен с одной переменной x. Напомним, что степенью такого многочлена называют степень его *старшего члена* — члена, содержащего переменную в наибольшей степени. Так, например, левая часть уравнения $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ — многочлен третьей степени. По степени этого многочлена и само уравнение называют уравнением третьей степени или кубическим уравнением. Вообще, уравнение, левая часть которого — многочлен n-й степени с одной переменной, а правая — нуль, называют *уравнением n-й степени.*

Уравнения первой степени имеют вид $ax + b = 0$, где $a \neq 0$. Такие уравнения вы начали решать ещё в начальной школе, а в 6 классе после знакомства с отрицательными числами могли решить любое уравнение первой степени.

Уравнения второй степени — квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, вы научились решать в 8 классе. Корни любого квадратного уравнения можно найти по формуле

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Решение уравнений, степень которых выше второй, обычно является значительно более трудной задачей. Покажем сначала, как можно найти целые корни целого уравнения.

14. Целые корни многочлена с целыми коэффициентами

Вы много раз с помощью теоремы Виета подбирали целые корни приведённых квадратных уравнений. Подбором можно находить целые корни целых уравнений и более высоких степеней.

Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда при любом целом значении переменной x значение этого многочлена — целое число. Нас интересуют корни уравнения $P(x) = 0$, т. е. значения x, обращающие многочлен $P(x)$ в нуль.

> Значения переменной, при которых значение многочлена равно нулю, называют ***корнями многочлена***.

Пример 1. Какие из чисел -2, 3, 17 являются корнями многочлена $P(x) = 4x^3 - 13x^2 + 5x - 6$?

Решение. Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно вычислить значения $P(-2)$, $P(3)$ и $P(17)$. Однако нас интересуют не столько сами значения многочлена, сколько равны ли они нулю.

1) При $x = -2$ все члены многочлена принимают отрицательные значения, поэтому значение многочлена отрицательно $P(-2) \neq 0$, и число -2 не является корнем многочлена $P(x)$.

2) $P(3) = 4 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 6 = 4 \cdot 27 - 13 \cdot 9 + 15 - 6 =$
$$= 108 - 117 + 15 - 6 = 0.$$

Число 3 — корень многочлена $P(x)$.

3) При $x = 17$ все члены многочлена $P(x)$, содержащие x, делятся на 17, а свободный член, равный -6, на 17 не делится. Если бы число 17 было корнем многочлена $P(x)$, то выполнялось бы равенство $4 \cdot 17^3 - 13 \cdot 17^2 + 5 \cdot 17 - 6 = 0$.

Перенесём -6 в правую часть равенства, а в левой части вынесем множитель 17 за скобки: $(4 \cdot 17^2 - 13 \cdot 17 + 5) \cdot 17 = 6$. В левой части равенства после вычислений получится целое число, которое делится на 17, а число 6, стоящее в правой части равенства, на 17 не делится, значит, это равенство не верно. Но тогда не выполняется и равенство

$$4 \cdot 17^3 - 13 \cdot 17^2 + 5 \cdot 17 - 6 = 0,$$

а значит, 17 не является корнем многочлена $P(x)$.

Ответ: из данных чисел только число 3 является корнем многочлена $P(x)$.

Рассуждения, которые позволили нам без вычислений сделать вывод о том, что 17 не является корнем многочлена $P(x)$, можно дословно повторить для любого целого числа, которое не является делителем свободного члена этого многочлена. Более того, аналогичные рассуждения можно провести и для любого многочлена с целыми коэффициентами.

Пусть целое число k — корень многочлена с целыми коэффициентами $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + c$. Тогда из того, что $a_1k^n + a_2k^{n-1} + \ldots + a_nk + c = 0$, следует, что $(a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_n)k = -c$. Левая часть равенства делится на k, значит, на k должна делиться и правая часть равенства, т. е. на k должен делиться свободный член многочлена.

Это позволяет сформулировать важный вывод.

> **Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.**

Значит, искать целые корни многочлена с целыми коэффициентами следует среди делителей его свободного члена.

Пример 2. Найти целые корни многочлена

$$Q(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x + 2.$$

Решение. Число 2 имеет 4 делителя: 1, -1, 2 и -2. Однако делители свободного члена — это ещё не корни, а лишь кандидаты в корни. Вычисляем соответствующие значения многочлена:

$Q(1) = 3 - 8 + 3 + 2 = 0,$ $\quad Q(-1) = -3 - 8 - 3 + 2 \neq 0,$

$Q(2) = 24 - 32 + 6 + 2 = 0,$ $\quad Q(-2) = -24 - 32 - 6 + 2 \neq 0.$

Ответ: многочлен $Q(x)$ имеет два целых корня 1 и 2.

▼ Перебирая корни, можно найти не только целые, но и дробные корни многочлена, если у него они есть. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное число, является корнем многочлена $3x^3 - 8x^2 + 3x + 2$, т. е. выполняется равенство

$$3\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 8\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 3\left(\frac{p}{q}\right) + 2 = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на q^3, получим

$$3p^3 - 8qp^2 + 3q^2p + 2q^3 = 0$$

и преобразуем его левую часть

$$3p^3 + q(-8p^2 + 3qp + 2q^2) = 0.$$

Сумма и второе слагаемое левой части делятся на q, значит, и первое слагаемое $3p^3$ делится на q. Поскольку p^3 не имеет с q общих делителей, значит, на q делится число 3. Таким образом, знаменатель искомой дроби должен быть равен 3, поскольку все целые корни (дроби со знаменателем 1) уже найдены.

Сгруппировав члены многочлена иначе, получим равенство $p(3p^2 - 8qp + 3q^2) + 2q^3 = 0$. Из этого равенства такими же, как и в предыдущем случае, рассуждениями, получим, что 2 должно делиться на p. Значит, претендовать на роль дробного корня могут четыре числа: $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$. Подставляя их в многочлен и вычисляя его значение, получим, что только $-\frac{1}{3}$ является корнем.

Проведённые рассуждения позволяют сформулировать важное свойство дробного корня многочлена.

> Если несократимая дробь является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то её знаменатель является делителем старшего коэффициента, а числитель — делителем свободного члена этого многочлена. △

Проверка делителей свободного члена, и тем более возможных дробных претендентов на роль корня многочлена, может оказаться довольно трудоёмким делом. Особенно много времени это занимало в докомпьютерную эпоху. Некоторое облегчение математикам принесла предложенная английским математиком Вильямом Горнером в 1819 г. схема вычислений. Горнер заметил, что с помощью несложного преобразования можно уменьшить число арифметических действий при вычислении значения многочлена.

Пример 3. Найти целые корни многочлена

$$5x^3 - 8x^2 - 19x - 6.$$

Решение. Нужно будет найти значения многочлена при $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Преобразуем данный многочлен к виду, удобному для вычислений.

$$5x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = ((5x - 8)x - 19)x - 6.$$

■ Особенно удобно вычислять значение представленного таким образом многочлена с помощью арифметического калькулятора, умеющего запоминать числа. Программа вычислений значения многочлена для данного значения x выглядит так:

$$5 * x\ \mathbf{MS} - 8 * \mathbf{MR} - 19 * \mathbf{MR} - 6 =$$

□

Если калькулятора нет, то вычисления удобно оформлять в специальной таблице — *схеме Горнера*. Покажем, как вычисляется значение многочлена $5x^3 - 8x^2 - 19x - 6$ при $x = 6$.

(1) Записываем коэффициенты данного многочлена в первую строку таблицы, рассматриваемое значение переменной записываем во «внешнюю» клетку второй строки, во вторую клетку второй строки «сносим» старший коэффициент многочлена.

	5	−8	−19	−6
6	5			

(2) Продолжаем заполнять вторую строку по следующему правилу.

В пустую клетку ставится произведение числа, стоящего слева от неё, на «внешнее» число (значение переменной, при котором мы подсчитываем значение многочлена), *сложенное с числом, стоящим «сверху»*.

Схематически это правило можно записать так.

$$\boxed{\text{Следующее число}} = \boxed{\text{Левое число}} \times \boxed{\text{Внешнее число}} + \boxed{\text{Верхнее число}}$$

Последовательно получаем следующее.

	5	−8	−19	−6
6	5	$6 \cdot 5 - 8 = 22$		

	5	−8	−19	−6
6	5	22	$6 \cdot 22 - 19 = 113$	

	5	−8	−19	−6
6	5	22	113	$6 \cdot 113 - 6 = 672$

Число 672 в последней клетке таблицы и является искомым значением многочлена $5x^3 - 8x^2 - 19x - 6$ при $x = 6$.

Таким образом, число 6 не является корнем данного многочлена. Остаётся проверить ещё семь чисел. Конечно, рисовать для каждого из них новую таблицу совершенно необязательно, лучше внизу добавлять новые строки.

	5	−8	−19	−6
6	5	22	113	672
1	5	−3	−22	−28
−1	5	−13	−6	0
2	5	2	−15	−36
−2	5	−18	17	−40
3	5	7	2	0
−3	5	−23	50	−156
−6	5	−38	209	1260

Ответ: числа −1 и 3 являются целыми корнями данного многочлена.

Упражнения

291. Какие из чисел -1, 0, 2 являются корнями многочлена

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2?$$

292. 1) Назовите делители свободного члена многочлена:

а) $30x^2 - 23x - 7$;
б) $3x^4 - 2x^3 + 3$;
в) $2x^3 + 6x^2 - 14x - 2$;
г) $x^5 + 3x^4 - 5x^2 + 4$.

2) Проверьте, являются ли делители свободного члена многочлена его корнями.

293. В таблице указаны вычисления значений многочлена $P(x)$ по схеме Горнера.

	2	1	-16	-15
1	2	$1 \cdot 2 + 1 = 3$	$1 \cdot 3 - 16 = -13$	$1 \cdot (-13) - 15 = -28$
-1	2	$-1 \cdot 2 + 1 = -1$	$-1 \cdot (-1) - 16 = -15$	$-1 \cdot (-15) - 15 = 0$
3	2	$3 \cdot 2 + 1 = 7$	$3 \cdot 7 - 16 = 5$	$3 \cdot 5 - 15 = 0$
-3	2	$-3 \cdot 2 + 1 = -5$	$-3 \cdot (-5) - 16 = -1$	$-3 \cdot (-1) - 15 = -12$
5	2	$5 \cdot 2 + 1 = 11$	$5 \cdot 11 - 16 = 39$	$5 \cdot 39 - 15 = 180$
-5	2	$-5 \cdot 2 + 1 = -9$	$-5 \cdot (-9) - 16 = 29$	$-5 \cdot 29 - 15 = -160$

Используя таблицу, запишите:
1) многочлен $P(x)$;
2) корни многочлена;
3) значения многочлена $P(x)$ при x, равном 1, -3, -5, 5.

294. 1) Заполните таблицу по схеме Горнера.

а)

	3	-8	-19	-80
5				

б)

	1	-3	10	-12
-2				

в)

	2	0	7	-5
-3				

2) Запишите многочлен $Q(x)$ и его значение при заданном значении переменной.

295. 1) Приведите многочлен к виду, удобному для вычисления его значений с помощью микрокалькулятора.
2) Найдите значение многочлена с точностью до 0,01:
а) $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 7$ при $x = -1{,}8$ и $x = 1{,}3$;
б) $x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 4$ при $x = -0{,}27$ и $x = 2{,}7$.

296. Найдите целые корни многочлена:
1) $3x^3 - x^2 - 2$;
2) $5x^3 + 9x^2 - x + 2$;
3) $3x^3 + 10x^2 - 27x - 10$;
4) $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$;
5) $2x^4 - x^3 + 17x^2 - 9x - 9$;
6) $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$;
7) $2x^5 + x^4 - x^3 + 54x^2 + 27x - 27$;
8) $x^6 - 5x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x - 12$.

297. Докажите, что не имеет целых корней уравнение:
1) $10x^2 - x - 2 = 0$;
2) $3x^2 - 2x + 6 = 0$;
3) $6x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$;
4) $3x^3 + x^2 - 9x - 3 = 0$;
5) $x^5 - 3x - 63 = 0$;
6) $x^8 - 30x^2 - 315 = 0$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Может ли число 2 быть корнем многочлена с целыми коэффициентами $x^6 - 5x^5 + \ldots - 15$?

2. Найдите целые корни уравнения $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$ по схеме Горнера и решите уравнение с помощью группировки.

15. Теорема Безу и следствие из неё

Проверка делителей свободного члена не позволяет найти иррациональные корни. Однако знание корня многочлена помогает разложить его на множители. Как это сделать, ещё в XVIII в. показал французский математик Этьен Безу (1730—1783), доказав следующую теорему.

Теорема Безу

Для любого многочлена n-й степени $P(x)$ и для любого числа a имеет место тождество

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a),$$

где $Q(x)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени, а $P(a)$ — значение многочлена $P(x)$ при $x = a$.

Из теоремы Безу непосредственно вытекает важное следствие.

Следствие из теоремы Безу

Если r — корень многочлена n-й степени $P(x)$, то $P(x) = (x - r)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени.

Действительно, если r — корень многочлена $P(x)$, то слагаемое $P(r)$ в сумме $(x - r)Q(x) + P(r)$ обращается в нуль.

Пример. Решить уравнение $4x^3 - 13x^2 + 5x - 6 = 0$.

Решение. В предыдущем пункте установлено, что число 3 является корнем многочлена

$$P(x) = 4x^3 - 13x^2 + 5x - 6.$$

Однако данное уравнение будет решено, если будут найдены не только целые, но и все остальные корни, или доказано, что их нет.

Согласно следствию из теоремы Безу, этот многочлен можно разложить на множители, одним из которых является двучлен $x - 3$, а другим некоторый квадратный трёхчлен $Q(x)$. Попробуем сгруппировать члены многочлена $P(x)$ так, чтобы в итоге вынести за скобки множитель $x - 3$.

$$4x^3 - 12x^2 - x^2 + 3x + 2x - 6 =$$
$$= 4x^2(x - 3) - x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(4x^2 - x + 2).$$

Произведение многочленов обращается в нуль, когда в нуль обращается хотя бы один из них. При $x = 3$ первый множитель равен нулю. Приравняв второй множитель к нулю, решим квадратное уравнение $4x^2 - x + 2 = 0$. Поскольку дискриминант уравнения отрицателен, корней у этого уравнения нет. Значит, многочлен $P(x)$ имеет единственный корень 3.

Ответ: 3.

Замечание 1. Для нахождения коэффициентов многочлена $Q(x)$ можно было обойтись и без группировки. Поможет в этом уже знакомая вам из предыдущего пункта схема Горнера. Найдём $P(3)$ по схеме Горнера.

	4	–13	5	–6
3	**4**	**–1**	**2**	0

Числа, оказавшиеся между крайними клетками второй строки таблицы, как раз и являются коэффициентами многочлена $Q(x)$.

Замечание 2. Корень x_1 многочлена $P(x)$, вообще говоря, может повториться и в многочлене $Q(x)$, тогда

$$P(x) = (x - x_1)\,Q(x) = (x - x_1)\,(x - x_1)\,F(x) = (x - x_1)^2F(x).$$

Как мы говорили, это не добавит уравнению $P(x) = 0$ новых корней, но может упростить их поиск, снизив степень рассматриваемого многочлена. Поэтому считают, что многочлены могут иметь равные (их ещё называют *совпавшими*) корни.

Упражнения

298. Найдите значения многочлена непосредственной подстановкой и с помощью схемы Горнера:

1) $x^2 - 3x + 5$ при $x = \pm1, \pm2, \pm5$;
2) $3x^2 + 2x - 4$ при $x = \pm1, \pm2, \pm4$;
3) $-x^3 + 4x^2 + 17x - 6$ при $x = \pm1, \pm2, \pm3$;
4) $2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$ при $x = \pm1, \pm2, \pm5$.

299. Найдите целые корни многочлена:

1) $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$;
2) $5x^3 - 19x^2 + 11x + 3$;
3) $2x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 20x + 12$;
4) $5x^4 + x^3 - 320x - 64$.

300. Представьте в виде произведения многочленов:

1) $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$;
2) $5x^3 + 9x^2 - 5x - 9$;
3) $2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6$;
4) $3x^4 - 19x^3 + 39x^2 - 29x + 6$.

301. Решите уравнение:

1) $x^3 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$;
3) $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
4) $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$;

5) $2x^3 - 5x^2 - 3x + 6 = 0$;

6) $2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$;

7) $6x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 13x + 6 = 0$;

8) $6x^4 + 7x^3 - 18x^2 - 13x + 6 = 0$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Найдите целые корни многочлена $2x^3 + 15x^2 + 22x - 15$.
2. Решите уравнение $3x^3 - 14x^2 + 16x - 3 = 0$.

16. Уравнения и неравенства

К решению уравнений часто сводится и решение неравенств. Особенно ярко это проявляется при решении неравенств методом интервалов.

Пример 1. Решить неравенство $(\operatorname{tg} 3x - 1)(2\sin 2x - 1) > 0$.

Решение. Найдём границы интервалов знакопостоянства — точки, в которых выражение $(\operatorname{tg} 3x - 1)(2\sin 2x - 1)$ обращается в нуль $\left(\text{при } \operatorname{tg} 3x = 1,\ \sin 2x = \frac{1}{2}\right)$ или теряет смысл $\left(\text{при } 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

$$\operatorname{tg} 3x = 1,\ 3x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3};$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2},\ 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k;$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k\ (k \in \boldsymbol{Z}).$$

Заметив, что число π является периодом функции $y = (\operatorname{tg} 3x - 1)(2\sin 2x - 1)$, отметим найденные границы на промежутке $[0; \pi)$.

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$;

$\frac{\pi}{12} + \pi k$: $\frac{\pi}{12}$;

$\frac{5\pi}{12} + \pi k$: $\frac{5\pi}{12}$;

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

При переходе через точки $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}$ знак изменяют сразу обе скобки, и поэтому их произведение знак сохраняет. При переходе через точку $\frac{3\pi}{4}$ знак меняет только первая скобка, а вместе с ней и произведение.

При переходе через точки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{6}$ меняет знак своей бесконечности $\operatorname{tg} 3x$, а значит, меняет знак и разность $\operatorname{tg} 3x - 1$. Найдём знак произведения, например при $x = 0$, и проведём линию знаков (рис. 102).

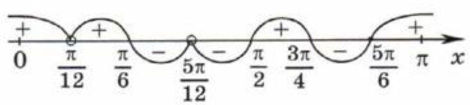


Рис. 102

С учётом упомянутой выше периодичности запишем ответ:

$$\left[\pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{5\pi}{6} + \pi k; \pi + \pi k\right) (k \in \mathbf{Z}).$$

Примечание. Объединение промежутков $\left[\pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + \pi k; \pi + \pi k\right)$ можно «склеить»:

$$\left(\frac{5\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \pi(k+1)\right) (k \in \mathbf{Z}) \text{ или } \left(\pi k - \frac{\pi}{6}; \pi k + \frac{\pi}{12}\right) (k \in \mathbf{Z}).$$

При решении многих уравнений приходится проводить довольно сложные преобразования и вычисления. Однако трудоёмкость решения часто удаётся существенно снизить с помощью введения новой переменной. Эта новая переменная заменяет собой какую-то, как правило, повторяющуюся часть исходного уравнения. Труднее всего при замене переменной бывает увидеть выражение, которое собственно и нужно заменить.

Пример 2. Решить уравнение

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=15.$$

Решение. После раскрытия скобок получится уравнение четвёртой степени и придётся либо искать его целые корни, либо пытаться найти какое-то разложение на множители — перспективы не очень радостные. Однако у этого уравнения есть важная особенность: если попарно перемножить внешние скобки произведения и внутренние его скобки, то получится уравнение, в котором кандидат на роль новой переменной очевиден:

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=15.$$

Обозначив выражение x^2-5x+4 буквой y, получаем квадратное уравнение $y(y+2)=15$. Найдя его корни $y_1=-5$ и $y_2=3$, возвращаемся к исходной переменной x:

$$x^2-5x+4=-5 \text{ или } x^2-5x+4=3,$$

$$x^2-5x+9=0 \text{ или } x^2-5x+1=0,\ x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Примечание. Можно было обратить внимание на другую особенность данного уравнения, а именно на то, что нули произведения, точки 1, 2, 3 и 4, симметричны относительно точки 2,5. Обозначив буквой z разность $x-2{,}5$, получим:

$$(z+1{,}5)(z+0{,}5)(z-0{,}5)(z-1{,}5)=15,\ (z^2-2{,}25)(z^2-0{,}25)=15.$$

Раскрыв скобки, придём к биквадратному уравнению, однако проще сделать ещё одну замену: $y=z^2-2{,}25$ и получить уже знакомое уравнение $y(y+2)=15$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x.$$

Решение. И в этом случае стандартный подход, связанный с освобождением от радикалов, не внушает оптимизма. Однако практически с первого взгляда в левой части уравнения можно заметить сумму и удвоенное произведение радикалов $\sqrt{x}$ и $\sqrt{x+7}$. Это наводит на мысль о квадрате суммы этих радикалов: $(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2 = 2x+7+2\sqrt{x^2+7x}$ — вот и для $2x$ из правой части исходного уравнения нашлось место:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2x+7+2\sqrt{x^2+7x} = 35+7,$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2 = 42.$$

Теперь стала видна требуемая замена: $y = \sqrt{x}+\sqrt{x+7}$.

После решения квадратного уравнения $y^2+y-42=0$ придётся решить ещё иррациональное уравнение относительно x, однако трудностей на этом пути не предвидится.

Как видно из рассмотренных примеров, замена переменной может потребовать некоторой наблюдательности.

Пример 4. Решить уравнение $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0$.

Решение. Особенностью этого целого рационального уравнения является равенство коэффициентов его левой части, равноудалённых от её концов. Такие уравнения называют ***возвратными***.

Поскольку 0 не является корнем данного уравнения, делением на x^2 получаем равносильное уравнение:

$$2x^2-3x-1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0,\quad 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Введём новую переменную $y = x+\frac{1}{x}$, тогда $y^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2$ и $x^2+\frac{1}{x^2} = y^2-2$. Получаем квадратное уравнение:

$$2(y^2-2)-3y-1=0,\quad 2y^2-3y-5=0,\quad y_1=-1,\ y_2=2{,}5.$$

Остаётся вернуться к переменной x и найти корни исходного уравнения.

Примечание. Выполняя замену переменной, полезно подумать о значениях, которые она может (или не может) принимать. Так, поскольку $|y| = \left|x+\frac{1}{x}\right| \geqslant 2$, можно не рассматривать корень $y_1=-1$.

Подбор целых корней среди делителей свободного члена — основной способ решения целых уравнений высоких степеней. Однако мало подобрать корни — нужно ведь ещё убедиться, что других корней нет. Здесь на помощь часто приходят свойства монотонности функций.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{19-x}-\sqrt{x+6}=\log_3(8x+3)-2.$$

Решение. Попробуем подобрать x так, чтобы извлекались корни в левой части уравнения: при $x = 3$ имеем $\sqrt{19-x}=\sqrt{16}=4$, $\sqrt{x+6}=\sqrt{9}=3$. При этом значении x и правая, и левая часть равенства принимают одно и то же значение, следовательно, число 3 — корень данного уравнения. Поскольку левая часть уравнения задаёт убывающую, а правая — возрастающую функцию, других корней данное уравнение не имеет.

Ответ: 3.

Рассмотрим ещё одну идею подбора корня, связанную со свойствами функций.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin\pi x+\cos\pi x=2^{\log_3\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{49}{16}}}.$$

Решение. Наибольшее значение, которое может принять сумма синуса и косинуса одного и того же угла, равно $\sqrt{2}$, так как $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\leqslant\sqrt{2}$.

Правая часть равенства в силу возрастания функций $u=\sqrt{v}$, $t=\log_3 u$ и $y=2^t$ принимает своё наименьшее значение при $x=\frac{1}{4}$ $\Bigl($абсцисса вершины параболы $v=x^2-\frac{x}{2}+\frac{49}{16}$, целиком расположенной в верхней полуплоскости ввиду отрицательности дискриминанта соответствующего квадратного трёхчлена$\Bigr)$. Найдём это значение:

$$2^{\log_3\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{49}{16}}}=2^{\log_3\sqrt{3}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

Оказалось, что наименьшее значение правой части уравнения совпадает с наибольшим значением его левой части. Остаётся проверить, происходит ли это при одном и том же значении x. Найдём значение левой части уравнения при $x = \frac{1}{4}$: $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. Значит, $\frac{1}{4}$ — корень данного уравнения.

Поскольку при всех других значениях x значения правой части уравнения больше, чем значения его левой части, то других корней нет.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Упражнения

302. Решите тригонометрическое неравенство:

1) $\cos(-0{,}5x) < \sin \pi$;
2) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$;
3) $\sin x \cos x \geqslant -\frac{1}{4}$;
4) $4 \sin(x - 2\pi) \cdot \cos(-x - \pi) \leqslant 1$;
5) $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) \leqslant \sqrt{3}$;
6) $\sin^2 x > \frac{1}{4}$;
7) $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 1$;
8) $\cos x(\operatorname{tg} 2x - 1) \leqslant 0$;
9) $\cos^2 x - \cos x < 0$;
10) $2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$;
11) $(\operatorname{ctg} 3x - 1)(2\cos 2x - 1) > 0$;
12) $(\operatorname{tg} 2x - 1)(2\sin 3x - 1) > 0$.

303. Какую особенность уравнения можно использовать в решении? Решите уравнение:

1) $(x - 3)(x - 2)x(x + 1) = 10$;
2) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120$;
3) $(x^2 - 2x + 3)(2x^2 - 3x + 6) = 6x^2$;
4) $(x - 6)(2x - 1)(x + 2)(2x + 3) = 21x^2$;

5) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$;

6) $35\cdot 3^{x^2}-35\cdot 5^{2x}-x\cdot 3^{x^2}+x\cdot 5^{2x}=0$;

7) $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$;

8) $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=0$.

304. Введите, если нужно, новую переменную и решите уравнение:

1) $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$;

2) $3\cos 2x+\sin^2 x+\sin 2x=1$;

3) $2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}+2=0$;

4) $9\cdot 4^x-13\cdot 6^x+4\cdot 9^x=0$;

5) $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$;

6) $\sqrt{8\cdot 3^{x+2}-23}=2-3^{x+1}$;

7) $\cos 2^x-2\,\mathrm{tg}^2\, 2^{x-1}+2=0$;

8) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

9) $\log_{3x}\dfrac{3}{x}+\log_{\frac{2}{3}} x=1$;

10) $x^2+2x-3=3|x+1|$;

11) $x^2-4x-4=2|x-2|$.

305. Решите неравенство:

1) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{\frac{2+x}{1-x}}>\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$;

2) $5^{2x+1}>5^x+4$;

3) $2\log_5 x-\log_x 125<1$;

4) $\log_{100} x^2+\lg^2 x<2$.

306. Решите уравнение, подбирая корень:

1) $2x^3-3x^2-32x-15=0$;

2) $3x^4-7x^3+6x^2+23x-6=0$;

3) $8-2x=\sqrt{x+1}$;

4) $\log_2(2^x-7)=3-x$;

5) $\log_6(6^{-x}+5)=1+x$;

6) $2^x=-\dfrac{1}{2}-x$;

7) $3^x+4^x=5^x$;

8) $2x^3=-18-x$;

9) $x^5+4x=-40$;

10) $2^{x+1}+x=-\dfrac{3}{2}$.

307. Решите уравнение, используя ограниченность функций:

1) $\sin 5x-2\cos 2x=3$;

2) $\sin x=x^2+x+1$;

3)● $2\cos\frac{x}{3} = 2^x + 2^{-x}$;

4) $\sin\frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$;

5)* $3\sin x + 4\cos 3x\cos x + 2\sin 5x = 7$;

6)* $4\cos^2 x - 4\cos^2 3x\cos x + \cos^2 3x = 0$.

308. Решите неравенство, используя ограниченность функций:

1) $\cos x < x^2 + 1$;

2) $\cos x \leqslant 1 + |x|$;

3) $\cos x \geqslant 1 + 2^x$;

4) $\cos x < 1 + \frac{1}{2 - \sin^2 x}$;

5)● $\arcsin\frac{2}{x} + \sqrt{x-1} > 1$;

6)● $\sqrt{\lg\sin x} < x - 12{,}5\pi$.

309. Найдите идею решения уравнения и постарайтесь её реализовать:

1) $(2x^2 + 3x)^2 - 7(2x^2 + 3x) + 10 = 0$;

2) $x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 12 = 0$;

3) $9^x + 12^x - 2\cdot 16^x = 0$;

4) $4^{\sqrt{x}} - 9\cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0$;

5) $2\sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2$;

6)○ $5\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x$;

7)● $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 8$;

8)● $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$.

310. Составьте план решения уравнения и постарайтесь его выполнить:

1) $|\sin x|(2x + 1) = |x + 0{,}5|$;

2) $9^{|x-2|\sin x} = 3^{x|\sin x|}$;

3) $\log_x(2x) = \sqrt{\log_x(2x^3)}$;

4)○ $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{\lg x + 1}$;

5)○ $\log_2 x\cdot\log_x\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = 1$;

6)○ $4^{3x^2 + x} - 8 = 2\cdot 8^{x^2 + \frac{x}{3}}$;

7)● $\log_7(7^{-x} + 6) = 1 + x$;

8)* $2^{\frac{3x-1}{2x+1}} - 1 = 2^{\frac{2-x}{2x+1}}$.

311. Решите уравнение:

1)● $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$;

2)● $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$;

3)● $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=6$;

4)● $\log_2(2x-x^2+15)=x^2-2x+5$;

5)● $\log_5(8x-x^2+9)=x^2-8x+18$;

6)● $\log_3((x-15)\cos x)=\log_3\frac{x-15}{\cos x}$;

7)● $\cos 3x\cdot\cos 2x=-1$;

8)● $\cos 2x+\cos\frac{3x}{4}-2=0$;

9)● $\sin x\cdot\sin 3x=-1$;

10)* $\cos x\cdot\cos 3x=\cos 0{,}3\cdot\cos 0{,}9$;

11)* $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$;

12)● $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$;

13)● $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$.

312. Докажите, что уравнение $\log_2(2-x)\log_x 2=2$ не имеет корней.

! Контрольные вопросы и задания

1. Какие два уравнения называют равносильными? В каком случае одно уравнение является следствием другого?

2. Можно ли поставить знак «$\Rightarrow$», переходя от одного уравнения к другому, вводя новую переменную?

3. Решите уравнение $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{43-6x}$.

17. Системы уравнений

Большинство уравнений, которые вам довелось решать, были уравнениями с одной переменной. В отличие от них уравнение с двумя переменными, как правило, имеет бесконечно много решений, хотя и из этого правила бывают исключения.

Пример 1. Решить уравнение $\ln^2 x + y^2 + 1 = 2y$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде:

$$\ln^2 x + (y-1)^2 = 0.$$

Оба слагаемых должны одновременно быть равны нулю, что достигается только при $x = y = 1$.

Ответ: $x = 1, y = 1$.

При решении уравнения мы встретились с требованием одновременного выполнения условий $\ln^2 x = 0$ и $(y-1)^2 = 0$, т. е. с системой $\begin{cases} \ln^2 x = 0, \\ (y-1)^2 = 0. \end{cases}$

Введение новой переменной, помогавшее решать уравнения предыдущего пункта, по сути дела тоже заменяло уравнение системой. Например, замена $2^{x-1} = y$ при решении уравнения $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$ приводит к системе $\begin{cases} y = 2^x, \\ y^2 - 5y - 24 = 0. \end{cases}$ Заметим, что, хотя нас по-прежнему интересуют только значения переменной x, знак равносильности при переходе от уравнения к этой системе ставить нельзя, так как её решением является не число x, а пара $(x; y)$.

Вы знакомы с двумя основными подходами к решению систем — методами сложения и подстановки. Оба эти метода сводят решение системы уравнений с несколькими переменными к решению уравнения с одной переменной. При этом используется возможность:

1) *умножать или делить уравнение системы на отличное от нуля число*;

2) *заменять уравнение его суммой или разностью с другим уравнением этой системы*;

3) *заменять в уравнении переменную её выражением, полученным из другого уравнения системы*[1].

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1. \end{cases}$$

[1] Результатом перечисленных преобразований будет система, равносильная исходной.

Решение. Заменим одно из уравнений системы его суммой с другим её уравнением:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x + \sin y + \cos y = 2, \\ \cos^2 x + \cos y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin y + \cos y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1. \end{cases}$$

В первом уравнении системы осталось одна переменная. Решим его, вводя вспомогательный угол.

$$\sin y + \cos y = 1, \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ или } y + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \; (k \in \boldsymbol{Z}),$$

$$y = 2\pi k \text{ или } y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; (k \in \boldsymbol{Z}).$$

Теперь можно найти значения $\cos y$ и подставить их во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = 2\pi k, \\ \cos^2 x + 1 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \cos^2 x + 0 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\pi k, \\ \cos x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \cos x = \pm 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pi n \end{cases} (k, n \in \boldsymbol{Z}).$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi k\right), \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, где $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

Примечание 1. Запись ответа в виде пар чисел применяется для переменных x и y. Если переменные обозначены другими буквами, лучше либо записывать ответ в виде простейших систем, либо использовать буквы с индексами, например:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, y_1 = 2\pi k; \quad x_2 = \pi n, y_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; (k, n \in \boldsymbol{Z}).$$

Примечание 2. Различные буквы n и k в записи ответа говорят о независимости их замены целыми числами — можно, например, взять $n = 0$, а $k = 3$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2 - y^2 + 2xy = 2, \\ 3x^2y^2 - 2y^2 + 8xy = 1. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение на -2 и прибавим его ко второму уравнению системы: $\begin{cases} x^2y^2 - y^2 + 2xy = 2, \\ x^2y^2 + 4xy + 3 = 0. \end{cases}$

Второе уравнение полученной системы является квадратным относительно произведения xy. Решая его, находим, что $xy = -1$ или $xy = -3$.

Подставляя эти значения xy в первое уравнение системы, получаем: $\begin{cases} 1 - y^2 - 2 = 2, \\ xy = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 9 - y^2 - 6 = 2, \\ xy = -3. \end{cases}$

Первая из этих систем не имеет решений, а у второй — два решения: $(3; -1)$ и $(-3; 1)$.

Ответ: $(3; -1)$, $(-3; 1)$.

Кроме сложения и вычитания уравнений системы, их иногда бывает удобно перемножать или делить друг на друга. При этом следует, конечно, учитывать возможность обращения в нуль выражений, на которые умножают или делят.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(x - y) = 1 - y^3, \\ (x^2 + xy + y^2)(x + y) = 1 + y^3. \end{cases}$$

Решение. В левых частях обоих уравнений можно заметить выражения, дополняющие друг друга до формул суммы и разности кубов x и y, что наводит на мысль перемножить уравнения системы. Однако сначала решим вопрос с нулями. Обе части второго уравнения обращаются в нуль при $x = 1$, $y = -1$. Эти значения не удовлетворяют первому уравнению системы, а значит, не являются её решением. Заменим теперь первое уравнение системы произведением её уравнений:

$$\begin{cases} (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (1 - y^3)(1 + y^3), \\ (x^2 + xy + y^2)(x + y) = 1 + y^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^6 - y^6 = 1 - y^6, \\ (x^2 + xy + y^2)(x + y) = 1 + y^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ (1 + y + y^2)(1 + y) = 1 + y^3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -1, \\ (1 - y + y^2)(-1 + y) = 1 + y^3. \end{cases}$$

Решая второе уравнение первой системы, получим $y = -1$ или $y = 0$, а второе уравнение второй системы корней не имеет. Пара $(1; -1)$, как уже отмечалось, не является решением системы.

Ответ: $(1; 0)$.

Как и при решении уравнений, при решении систем используются свойства монотонных функций.

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_{0,7} \dfrac{x}{y} = x - y, \\ y - \sqrt{x} = 6. \end{cases}$

Решение. С учётом положительности искомых значений переменных перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \log_{0,7} x - x = \log_{0,7} y - y, \\ y - \sqrt{x} = 6. \end{cases}$$

Левая и правая части первого уравнения системы представляют собой значения убывающей функции $z = \log_{0,7} t - t$, соответственно, при $t = x$ и при $t = y$. Из их равенства следует, что $x = y$. Получаем систему $\begin{cases} x = y, \\ y - \sqrt{y} = 6, \end{cases}$ второе уравнение которой является квадратным относительно $\sqrt{y}$. Решив его и найдя $y = 9$, получаем ответ.

Ответ: $(9; 9)$.

Как и при решении уравнений, при решении систем используется замена переменных.

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{15}{4}. \end{cases}$

Решение. Обозначив $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = u$ и $\dfrac{1}{y} = v$, получим:

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{5}{2}, \\ u^2 - v^2 = \dfrac{15}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = \dfrac{5}{2}, \\ (u - v)(u + v) = \dfrac{15}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = \dfrac{5}{2}, \\ u - v = \dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2, \\ v = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Возвращаемся к переменным x и y: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4}; 2\right)$.

Иногда замена переменных может даже увеличить их число.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-3x} - 1 = \sqrt{5y-3x}, \\ \sqrt{5y-3x} + \sqrt{5y-3x} = 5 \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{4-3x} = u$, $\sqrt{5y-3x} = v$ и $\sqrt{1-5y} = z$, где u, v и z могут принимать только неотрицательные значения. Тогда $u^2 - v^2 - z^2 = 3$, и получается система трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} u - 1 = v, \\ z + v = 5, \\ u^2 - v^2 - z^2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} v = u - 1, \\ z = 6 - u, \\ u^2 - (u-1)^2 - (6-u)^2 = 3. \end{cases}$$

$u^2 - 14u + 40 = 0$, $u = 4$ или $u = 10$,

$\begin{cases} u = 4, \\ v = 3, \\ z = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} u = 10, \\ v = 9, \\ z = -4. \end{cases}$ Заметим сразу, что вторая из полученных систем не удовлетворяет условию введения переменной z ($z \geqslant 0$).

Возвращаясь к переменным x и y, получим:

$\sqrt{4-3x} = 4$, $x = -4$; $\sqrt{1-5y} = 2$, $y = -\dfrac{3}{5}$.

Понятно, что при этом $v = \sqrt{5y-3x} = \sqrt{-3+12} = 3$.

Ответ: $\left(-4; -\dfrac{3}{5}\right)$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = 1, \\ 3x^2 + 4xy + 2y^2 = 11. \end{cases}$$

Решение. Данная система уравнений является *однородной*, так как левые части её уравнений — однородные многочлены второй степени (каждый член данного многочлена имеет вторую степень).

Умножим первое уравнение на 11 и вычтем его из второго уравнения системы: $\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = 1, \\ -8x^2 + 26xy + 57y^2 = 0. \end{cases}$

Получилась система, второе уравнение которой является однородным уравнением второй степени относительно x и y. Поскольку $y = 0$ не удовлетворяет системе, делением на $-y^2$ приводим его к уравнению, являющемуся квадратным относительно $\frac{x}{y}$:

$$8\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 26\left(\frac{x}{y}\right) - 57 = 0,\ \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{19}{4}.$$

Таким образом, исходная система свелась к совокупности двух незатейливо решаемых методом подстановки систем:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y, \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{19}{4}y, \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = 1. \end{cases}$$

Система, уравнения которой являются целыми и симметричны относительно переменных, т. е. не изменяются при замене x на y, а y на x, и многочлены, стоящие в левых частях уравнений, называют ***симметрическими***.

Решения одной из простейших симметрических систем $\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q \end{cases}$ можно найти, как корни квадратного уравнения $z^2 - pz + q = 0$, а в более сложных случаях может помочь введение новых переменных: $u = x + y$, $v = xy$.

Пример 9. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y + 3xy = 13. \end{cases}$

Решение. Обозначим $x + y = u$, $xy = v$, тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Получаем:

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 10, \\ u + 3v = 13; \end{cases} \begin{cases} (13 - 3v)^2 - 2v = 10, \\ u = 13 - 3v. \end{cases}$$

$9v^2 - 80v + 159 = 0$, $v_1 = 3$, $v_2 = \frac{53}{3}$, $u_1 = 4$, $u_2 = -\frac{14}{3}$.

Возвращаемся к переменным x и y:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3, \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = -\frac{14}{3}, \\ xy = \frac{53}{3}, \end{cases}$ $z^2 + \frac{14}{3}z + \frac{53}{3} = 0$, $3z^2 + 14z + 53 = 0$, нет решений.

Ответ: (3; 1), (1; 3).

Переход к системе помогает иногда и при решении иррациональных уравнений.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt[3]{3 - x} + \sqrt[3]{4 + x} = 1$.

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{3 - x} = m$, $\sqrt[3]{4 + x} = n$. Тогда $m^3 = 3 - x$, $n^3 = 4 + x$ и $m^3 + n^3 = 7$. Получаем симметрическую систему $\begin{cases} m + n = 1, \\ m^3 + n^3 = 7. \end{cases}$ С учётом того, что $m + n = 1$, преобразуем левую часть второго уравнения:

$m^3 + n^3 = (m + n)((m + n)^2 - 3mn) = 1 - 3mn$. Далее имеем:

$\begin{cases} m + n = 1, \\ mn = -2. \end{cases}$ $z^2 - z - 2 = 0$, $z_1 = -1$, $z_2 = 2$; $n_1 = -1$, $n_2 = 2$.

Понятно, что записывать значения m излишне.

Возвращаясь к переменной x, получаем:

1) $\sqrt[3]{4 + x} = -1$, $x = -5$; 2) $\sqrt[3]{4 + x} = 2$, $x = 4$.

Подставив найденные значения x в исходное уравнение, убеждаемся, что они действительно являются его корнями.

Ответ: 4; –5.

Упражнения

313. 1) Решите систему уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ x + y = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x + 4y = 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y = 3x^2, \\ x + 2y = 3y^2. \end{cases}$

2) В чём особенность систем уравнений, которые решаются методом подстановки?

314. 1) Решите систему уравнений методом сложения:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 13, \\ 3x - 2y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + xy = 28, \\ y^2 + xy = -12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 3y = 9, \\ 7x + 3y = 15; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - y + xy = 5, \\ x - y - xy = -7; \end{cases}$

в)○ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 3x + y + z = 6, \\ 2x + y + 2z = 6; \end{cases}$ е)○ $\begin{cases} x + 3y + 2z = 1, \\ 2x + 3y - z = 11, \\ 3x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$

2) В чём особенность систем уравнений, которые решаются методом сложения?

315.● Критическими точками функции

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

являются $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Найдите $P(3)$, если $P(1) = 4$.

316.○ Решите систему тригонометрических уравнений:

1) $\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(x - y) = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(2x + 3y) = 0, \\ \cos(3x - 2y) = 1. \end{cases}$

317. Решите систему уравнений, используя метод сложения:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x + y} - \dfrac{6}{x - y} = -2, \\ \dfrac{1}{x + y} + \dfrac{3}{x - y} = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$ 3)○ $\begin{cases} \sin^2 x + \cos y = 1, \\ \cos^2 x + \sin y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4, \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2; \end{cases}$ 4)○ $\begin{cases} \sin^2 x - \cos y = 1, \\ \cos^2 x - \sin y = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{8}{x-2y} + \dfrac{3}{2x+y} = 3, \\ \dfrac{4}{x-2y} + \dfrac{3}{2x+y} = 2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -6, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152, \\ x^2y + y^2x = 120. \end{cases}$

318. Решите систему, перемножая её уравнения или деля одно уравнение на другое:

1) $\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2y^3 - x^3y^2 = 4, \\ x^2y^3 + x^3y^2 = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 24, \\ 3^x \cdot 4^y = 54; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\sin(x+y)} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{\cos y}{\sin(x+y)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x\sin^2 x = y\cos^2 y, \\ y\sin^2 y = x\cos^2 x. \end{cases}$

319. Решите систему уравнений, используя замену переменных:

1) $\begin{cases} 2\log_x 8 + 3y = 24, \\ y - 2\left(\log_x \dfrac{1}{2}\right)^3 = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5\log_2 x = \log_2 y^3 - \log_2 4, \\ 2\log_4 y = 8 - \log_2 4x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 0{,}5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8. \end{cases}$

320. Решите систему уравнений как однородную:

1) $\begin{cases} 3x^2 - 9y^2 + 8xy = 26, \\ x^2 - 8y^2 - 7xy = 52; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2 y + 3\sin x \sin y = 0, \\ 21\cos 2x - \cos 2y = 10. \end{cases}$

321. Решите симметрическую систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2y + y^2x = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4^{(x-y)^2-1} = 1, \\ 5^{x+y} = 125. \end{cases}$

322. Решите иррациональное уравнение, при необходимости сводя его к системе:

1) $\sqrt{x+10} + \sqrt{x-2} = 6;$

2) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-5} = 2;$

3) $\sqrt{2y-5} = 1 + \sqrt{y-3};$

4) $\sqrt{4y+1} = \sqrt{y-2} + 3;$

5) $\sqrt[3]{20+x} + \sqrt[3]{x-8} = 2;$

6) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2;$

7) $\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{7+x} = 4;$

8) $\sqrt[4]{41-x} + \sqrt[4]{41+x} = 4.$

323. Найдите идею решения и решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ y - x = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 16^x + 16^y = 68, \\ 16^{x+y} = 256; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2(x+y) = 3, \\ \lg\frac{x}{y} - \log_{0,1}\frac{x}{y} = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5, \\ \lg x - \lg y = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=7, \\ 2\log_4 x+\log_2 y=6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x=\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \cos x+\cos y=0{,}5, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{7}{4}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+3y-z=23, \\ 2x+3y+2z=20, \\ 4x-3y+z=-11; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ x+2y+3z-t=2, \\ 3x+5y+5z-3t=6; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 6\sin x+7\log_y 3=-10, \\ 2\log_y 3-5\sin x=0{,}5; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}=6, \\ \log_4 x+\log_4 y=-3; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{y}{2}=x-y, \\ 2x^2-xy+5y=6; \end{cases}$

13) $\begin{cases} e^{x-y}=\dfrac{\ln x}{\ln y}, \\ y-\sqrt{x-3}=9; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 5\sin 2x\cdot\operatorname{tg} y=12, \\ 5\sin 2y\cdot\operatorname{tg} x=6. \end{cases}$

324. Найдите все решения системы $\begin{cases} 5^{\sin x+\operatorname{tg} y}=1, \\ 7^{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 y}=7, \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Какие две системы называют равносильными? Какие преобразования системы заведомо переводят её в равносильную?

2. Можно ли использовать знаки следования или равносильности при переходе к системе с новыми переменными?

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x+2^y=12, \\ x+y=5. \end{cases}$

18. Задания с параметрами

В большинстве уравнений и неравенств буквами обозначены переменные. Однако бывают случаи, когда буквами заменяют конкретные числа и решают уравнение или неравенство в общем виде. Так, например, решение квадратного уравнения в общем виде привело к формуле корней. В записи общего вида квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ буквами a, b и c заменены все числовые коэффициенты и свободный член квадратного трёхчлена, но возможна и замена отдельных чисел.

Буквы, заменяющие в уравнении или неравенстве конкретные числовые данные, называют ***параметрами***.

Со времён Декарта параметры обычно обозначают первыми (a, b, c), а переменные — последними (x, y, z) буквами латинского алфавита. Это позволяет во многих случаях не указывать, какой буквой обозначен параметр, а какой — переменная.

Решая уравнение или неравенство с параметрами, для любых допустимых значений параметров указывают, какими будут его решения.

Пример 1. Решить неравенство $ax^2 - 2x + 1 < 0$.

Решение. В этом неравенстве один параметр a, который может принимать любые значения.

Если $a = 0$, имеем линейное неравенство $-2x + 1 < 0$, решение которого: $x > 0{,}5$.

Если $a \neq 0$ — неравенство квадратное.

Его дискриминант $1 - a$ положителен при $a < 1$, равен нулю при $a = 1$ и отрицателен при $a > 1$.

При решении квадратных неравенств важен знак старшего коэффициента квадратного трёхчлена. Поэтому случай $a < 1$ нужно разбить на $a < 0$ и $0 < a < 1$.

1. Если $a < 0$, то решениями неравенства являются все числа, меньшие меньшего, и все числа, большие большего корня квадратного трёхчлена $ax^2 - 2x + 1$:

$$x < \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a} \quad \text{или} \quad x > \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}.$$

2. Если $0 < a < 1$, то решения неравенства расположены между корнями: $\frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a} < x < \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$.

3. Если $a = 1$ — неравенство не имеет решений.

4. Если $a > 1$ — неравенство не имеет решений.

В ответе указываются все рассмотренные случаи.

Ответ: если $a = 0$, то $x > 0{,}5$;

если $a < 0$, то $x < \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$ или $x > \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}$;

если $0 < a < 1$, то $\frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a} < x < \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$;

если $a \geqslant 1$, то нет решений.

▼ При выполнении заданий с параметрами на помощь часто приходят различные графические соображения. Так, умение строить график квадратного трёхчлена используется в следующем примере, где работа ведётся уже с двумя квадратными неравенствами.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 3 + a < 0, \\ x^2 - 4x - 3 + a < 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим два квадратных трёхчлена $f(x) = x^2 - 2x + 3 + a$ и $g(x) = x^2 - 4x - 3 + a$. Значения x, являющиеся решениями данной системы, одновременно находятся и между корнями трёхчлена f, и между корнями трёхчлена g, а значит, дискриминанты этих трёхчленов должны быть положительными: $\begin{cases} -2 - a > 0, \\ 7 - a > 0; \end{cases}$ $a < -2$.

Сами корни легко получить по формуле корней, однако решение системы неравенств зависит от взаимного расположения корней трёхчленов на числовой прямой.

Поскольку старшие коэффициенты квадратных трёхчленов равны, параболы, являющиеся их графиками, получаются одна из другой с помощью параллельного переноса. Оказывается, что для выяснения порядка расположения корней таких трёхчленов достаточно знать:

1) в какой полуплоскости, верхней или нижней, расположена точка пересечения парабол;

2) как в этой точке расположены касательные к параболам.

Найдём абсциссу x_0 и ординату $f(x_0)$ точки пересечения парабол.

Если $f(x) = g(x)$, то $x^2 - 2x + 3 + a = x^2 - 4x - 3 + a$, $x_0 = -3$;

$$f(x_0) = f(-3) = 9 + 6 + 3 + a = 18 + a.$$

Найдём значения производных f' и g' в точке $x_0 = -3$:

$$f'(x) = 2x - 2,\ f'(-3) = 2(-3) - 2 = -8;$$
$$g'(x) = 2x - 4,\ g'(-3) = 2(-3) - 4 = -10.$$

При $f(x_0) > 0$ окрестность точки пересечения парабол схематически выглядит так, как показано на рисунке 103. Изображённые на этом рисунке части парабол легко продолжить (рис. 104). Параболы пересекают ось абсцисс в её точках β_1,

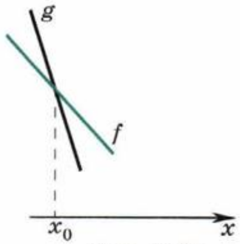


Рис. 103

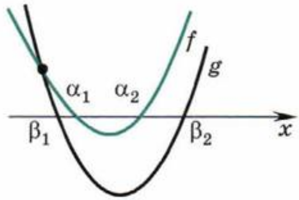


Рис. 104

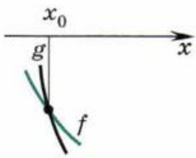


Рис. 105

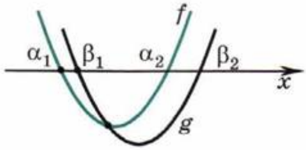


Рис. 106

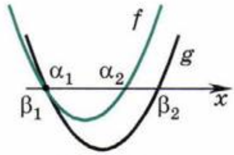


Рис. 107

α_1, α_2 и β_2, где α_1 и β_1 меньшие, а α_2 и β_2 большие корни квадратных трёхчленов f и g соответственно. Решением системы в этом случае является интервал $(\alpha_1; \alpha_2)$.

При $f(x_0) < 0$ получаем соответственно рисунки 105 и 106. Решением системы в этом случае является интервал $(\beta_1; \alpha_2)$.

Случаю $f(x_0) = 0$ (рис. 107) соответствует равенство корней $\alpha_1 = \beta_1$. Решением будет интервал $(\alpha_1; \alpha_2)$, как и в случае $f(x_0) > 0$.

Остаётся выразить результаты нашего исследования через параметр a и записать ответ.

$$f(x_0) \geqslant 0: \quad \begin{cases} a < -2, \\ 18 + a \geqslant 0, \end{cases} \quad -18 \leqslant a < -2;$$

$$f(x_0) < 0: \quad \begin{cases} a < -2, \\ 18 + a < 0, \end{cases} \quad a < -18;$$

$$\alpha_1 = 1 - \sqrt{-2 - a}, \ \alpha_2 = 1 + \sqrt{-2 - a};$$

$$\beta_1 = 2 - \sqrt{7 - a}.$$

Ответ: если $a < -18$, то $(2 - \sqrt{7 - a}; 1 + \sqrt{-2 - a})$;

если $-18 \leqslant a < -2$, то $(1 - \sqrt{-2 - a}; 1 + \sqrt{-2 - a})$;

если $a \geqslant -2$, то нет решений. △

Во многих задачах с параметрами требуется указать не сами решения, а их количество или найти значения параметра, при которых выполняется некоторое заданное условие.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3x-2} = x + a$ имеет единственный корень.

Решение 1. Обозначим $\sqrt{3x-2} = y$, тогда $3x - 2 = y^2$ и $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)$. Получим:

$$y = \frac{1}{3}(y^2 + 2) + a,\ y^2 - 3y + 2 + 3a = 0.$$

Исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда уравнение $y^2 - 3y + 2 + 3a = 0$ имеет единственный неотрицательный корень. Это возможно в трёх случаях: 1) когда единственный корень уравнения неотрицателен; 2) когда корни имеют разные знаки; 3) когда один корень равен нулю, а второй отрицателен.

Рассмотрим эти случаи.

1. Единственный корень ($D = 0$): $9 - 4(2 + 3a) = 0$, $a = \frac{1}{12}$. При этом значении a единственный корень уравнения равен $\frac{3}{2}$ (положителен).

2. Корни разных знаков: $2 + 3a < 0$, $a < -\frac{2}{3}$.

3. Один из корней равен нулю: $2 + 3a = 0$, $a = -\frac{2}{3}$. При этом значении a второй корень равен 3 (положителен). Значит, в этом случае уравнение имеет два корня, что не соответствует заданию.

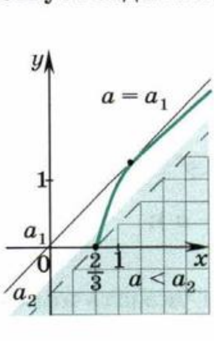


Рис. 108

Решение 2. График функции $y = \sqrt{3x-2}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом вправо на 2 с последующим сжатием к оси ординат в 3 раза.

Графиком функции $y = x + a$ при любом a является прямая, параллельная прямой $y = x$ (рис. 108).

Из рисунка видно, что графики имеют единственную общую точку при $a = a_1$ (касание графиков) и при $a < a_2$.

Значение a_2, очевидно, равно $-\frac{2}{3}$, а для нахождения a_1 можно приравнять нулю дискриминант уравнения, которое получится после возведения в квадрат обеих частей исходного уравнения:

$$3x - 2 = (x + a)^2,\ x^2 + x(2a - 3) + a^2 + 2 = 0;$$

$$D = 0:\ (2a - 3)^2 - 4(a^2 + 2) = 0,\ a = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $a = \frac{1}{12}$, $a < -\frac{2}{3}$.

Пример 4. При каких значениях a имеет четыре корня уравнение $x^2 - a = 2|x|$?

Решение 1. Перепишем данное уравнение иначе:

$$x^2 - 2|x| + 1 = a + 1,\ (|x| - 1)^2 = a + 1.$$

Левая часть уравнения задаёт функцию, график которой получается из параболы $y = x^2$ сдвигом на 1 вправо и симметрией точек графика, расположенных в правой полуплоскости относительно оси ординат. Правой части уравнения соответствует прямая, перпендикулярная оси ординат и пересекающая её в точке $a + 1$.

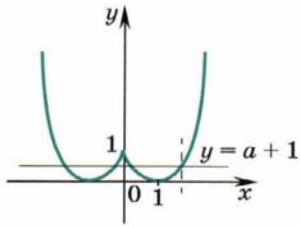


Рис. 109

На рисунке 109 видно, что графики имеют четыре общие точки, если прямая $y = a + 1$ пересекает ось ординат между 0 и 1.

Значит, $0 < a + 1 < 1$, $-1 < a < 0$.

Решение 2. Обозначим $|x| = y$. Искомые значения a соответствуют случаю двух положительных корней уравнения $y^2 - 2y - a = 0$. Значит, меньший корень этого уравнения должен быть больше нуля:

$$1 - \sqrt{1 + a} > 0,\ \sqrt{1 + a} < 1,\ 0 < 1 + a < 1,\ -1 < a < 0.$$

Ответ: $-1 < a < 0$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых решением неравенства $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} \leqslant 2$ является отрезок.

Решение. Перепишем неравенство, попутно упростив его: $|x-a| \leqslant 2-\sqrt{5-x}$. Выражение, стоящее в правой части неравенства, задаёт функцию, график которой получается из графика функции $y=\sqrt{x}$ в результате сдвига на 5 влево, симметрии относительно начала координат и сдвига на 2 вверх:

$$\sqrt{x} \to \sqrt{x+5} \to -\sqrt{-x+5} \to 2-\sqrt{-x+5}.$$

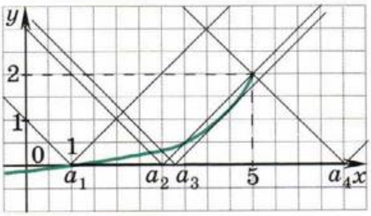


Рис. 110

Левой части неравенства соответствует график функции $y=|x|$, который сдвигается на a вдоль оси абсцисс (рис. 110).

Ответом к задаче будут два промежутка: $a_1 < a < a_2$ и $a_3 \leqslant a < a_4$. Вычислений требует только значение a_3, соответствующее случаю касания, а остальные три значения a легко устанавливаются по рисунку:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_4 = 7.$$

Найдём a_3. Угловой коэффициент касательной равен 1, значит, абсцисса точки касания находится из уравнения

$$(2-\sqrt{5-x})' = 1,\quad \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = 1,\quad 5-x = \frac{1}{4},\quad x_0 = 4\frac{3}{4}.$$

При этом значении x ординаты точек кривой и касательной совпадут, значит, $4\frac{3}{4} - a = 2 - \sqrt{5-4\frac{3}{4}}$, $a = 3\frac{1}{4}$.

Ответ: $1 < a < 3,\ 3\frac{1}{4} \leqslant a < 7$.

При решении некоторых уравнений и неравенств оказывается удобным временно поменять ролями параметр и переменную, т. е. считать параметр переменной, а переменную параметром.

Пример 6. Решить неравенство

$$4x^4 + 4ax^2 + 32x + a^2 + 8a > 0$$

при всех положительных значениях a.

Решение. Левая часть неравенства является многочленом четвёртой степени относительно x и всего лишь второй степени относительно a. Попытаемся поэтому разложить левую часть на множители как квадратный трёхчлен

$$a^2 + (4x^2 + 8)a + 4x^4 + 32x.$$

$$\frac{D}{4} = (2x^2 + 4)^2 - 4x^4 - 32x = 16x^2 - 32x + 16 = 16(x - 1)^2;$$

$$a_{1;\,2} = -2x^2 - 4 \pm 4(x - 1);$$

$$a^2 + (4x^2 + 8)a + 4x^4 + 32x = (a + 2x^2 - 4x + 8)(a + 2x^2 + 4x).$$

Вернём теперь x звание переменной и, рассматривая выражения в скобках как квадратные трёхчлены относительно x, решим неравенство: $(2x^2 - 4x + 8 + a)(2x^2 + 4x + a) > 0$.

При $a > 0$ значения трёхчлена в первой скобке положительны. Трёхчлен во второй скобке имеет два корня при $a < 2$, один корень при $a = 2$ и не имеет корней при $a > 2$. Найдя корни по формуле корней, записываем ответ.

Ответ: если $0 < a < 2$, то $x < \frac{-2 - \sqrt{4 - 2a}}{2}$ или $x > \frac{-2 + \sqrt{4 - 2a}}{2}$; если $a = 2$: $x \neq -1$; если $a > 2$, x — любое число.

Пример 7. Найти все значения a, при которых решением неравенства $|2x^2 + x - a - 8| \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4$ является отрезок.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 + x - a - 8 \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4, \\ 2x^2 + x - a - 8 \geqslant -x^2 - 2x + 2a + 4. \end{cases}$$

Упрощая, получим: $\begin{cases} a \leqslant -x^2 + x + 4, \\ a \leqslant x^2 + x - 4. \end{cases}$

Будем рассматривать параметр a как переменную и отметим на координатной плоскости xOa множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе. Эти точки одновременно находятся под обеими параболами $a = -x^2 + x + 4$ и $a = x^2 + x - 4$ (рис. 111). Приравнивая друг другу правые части этих уравнений, находим координаты точек пересечения парабол: $(-2; -2)$ и $(2; 2)$.

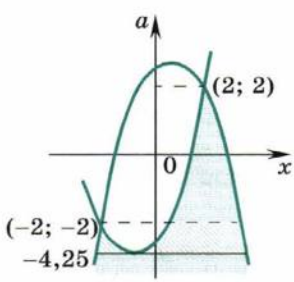


Рис. 111

На рисунке видно, что некоторые прямые, параллельные оси абсцисс, имеют с закрашенной областью общий отрезок. Наша задача — указать ординаты точек этих прямых. Это, во-первых, ординаты вершины параболы $a = x^2 + x - 4$ ($x_0 = -0{,}5$; $a_0 = -4{,}25$) и точек, расположенных ниже её. Во-вторых, это точки интервала $(-2; 2)$.

Ответ: при $a \leqslant -4{,}25$ и $|a| < 2$.

Рассмотрим ещё два примера, ключевым в которых является требование единственности решения.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $\cos ax = 2 - \cos x$ имеет единственный корень?

Решение. При всех значениях a данное уравнение имеет корень $x = 0$. Чтобы этот корень оказался единственным, $\cos ax$ и $\cos x$ не должны одновременно принимать значение 1 ни при каком другом значении x. Отсюда

$$\frac{2\pi m}{a} \neq 2\pi n \ (m, n \in \boldsymbol{Z}, m \neq 0, n \neq 0). \text{ Имеем } a \neq \frac{m}{n}.$$

Дробью $\frac{m}{n}$ можно записать любое рациональное число, значит, неравенство $a \neq \frac{m}{n}$ говорит о том, что a не является рациональным числом.

Ответ: при любых иррациональных значениях a.

Пример 9. Найти значения параметров a и b, при которых система $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что система не изменится, если одновременно поменять знаки x и y, т. е. если тройка чисел $(\alpha; \beta; \gamma)$ является решением системы, то и тройка $(-\alpha; -\beta; \gamma)$ тоже её решение. Эти решения в силу требования единственности должны совпадать, что может произойти только при $x = y = 0$. Но тогда система принимает вид $\begin{cases} z = a, \\ z = b, \\ z^2 = 4, \end{cases}$ откуда $b = a = \pm 2$.

Единственное решение система может иметь только при этих значениях параметров, а вот имеет ли — следует проверить.

Проверка.

1. Если $a = b = 2$, то $\begin{cases} xzy + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое: $\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xy(z^2 - z) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

Второе равенство системы выполняется, когда хотя бы один из множителей произведения $xyz(z - 1)$ обращается в нуль. Подстановка в систему значения $x = 0$ приводит к решению $(0; 0; 2)$. К этому же решению приводит и подстановка $y = 0$. Значение $z = 0$ не удовлетворяет первому уравнению системы, а при $z = 1$ получаем систему $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$ которая имеет ненулевые решения. Значит, при $a = b = 2$ система имеет несколько решений, что не соответствует заданию.

2. Если $a = b = -2$, то $\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz\,(z - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

Подставляя, как и в первом случае, значение $x = 0$, получаем решение $(0; 0; -2)$. К этому же решению приводит и подстановка $y = 0$. Значение $z = 0$ не удовлетворяет системе, а при $z = 1$ получаем систему $\begin{cases} xy = -3, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$ которая не имеет решений.

Значит, при $a = b = -2$ система имеет единственное решение.

Ответ: система имеет единственное решение при $a = b = -2$.

Упражнения

325. Найдите все значения параметра a, при которых не имеет корней уравнение:

1) $ax = 2x + 1$; 2) $x = 2ax + 2$.

326. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $(a^2 + a - 12)x = a^2 - 2a - 3$;

2) $(a^2 - 4a + 3)x = a^2 - 6a + 5$.

327. 1) При каком значении параметра b корень уравнения $3x(b + 4) = 6b + 35$ в 2 раза больше корня уравнения $2(x + 1) = 3(x - 2)$?

2) При каком значении параметра a корень уравнения $a(2x - 1) - 1 = 4a - x$ в 4 раза меньше корня уравнения $x - 7 = 3(3 - x)$?

328.* Стороны треугольника a, b и c. Какую наибольшую площадь может иметь этот треугольник в зависимости от d, если $a \leqslant 4$, $b \leqslant 5$ и $c \leqslant d$?

329. Найдите все значения a, при которых число 2:

1) является корнем уравнения:

а) $|x + 2a| \cdot x + 1 - a = 0$;

б) $\left(a + 2x^3 - \operatorname{tg}\frac{7\pi x}{2}\right)\sqrt{ax + 1} = 0$;

в) $|x - a| \cdot x + a - 3 = 0$;

г) $\sqrt{2 \cdot 2^x - a} = x^2 + a$;

2) не является решением неравенства $-2 \leqslant |x + 3a| - x^2$.

330. 1) Найдите значения параметра a, при которых:

а) число нуль является корнем уравнения

$\sqrt{a\cos 2x - 3\sin 2x} = \cos x$;

б) число $-\frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения

$\sqrt{2\sin 2x - a\cos 2x} = -\sin x$.

2) Для найденных значений a решите данное уравнение.

331. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(0,2)^x = \frac{2a + 3}{5 - a}$:

1) не имеет корней;

2) имеет отрицательные корни.

332. Линейным или квадратным является уравнение $5b(b - 2)x^2 + (5b - 2)x - 16 = 0$ относительно x при:

1) $b = 1$; 2) $b = 2$; 3) $b = 0,4$; 4) $b = 0$?

333. Определите вид уравнения

$$2ax(x-1)+x(ax-12)=3x+8$$

относительно x при:

1) $a=1$; 2) $a=-6$; 3) $a=-2$; 4) $a=0$.

334. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax(ax+3)+6=x(ax-6)$$

является:

1) квадратным; 2) неполным квадратным; 3) линейным?

335. Решите относительно x уравнение:

1) $x^2-2x+c=0$;
2) $x^2-ax=0$;
3) $mx^2-6x+1=0$;
4) $12x^2+7cx+c^2=0$.

336. Решите уравнение:

1) $(m-1)x^2+2(m-1)x+m+3=0$;

2) $\dfrac{3mx-5}{(m-1)(x+3)}+\dfrac{3m-11}{m-1}=\dfrac{2x+7}{x+3}$.

337. 1) Найдите значения параметра a, при которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $x^2-ax+a-1$ является наименьшей.

2) При каких значениях параметра k уравнение имеет: единственный корень; имеет два корня; имеет три корня

а) $kx+2=\left|7-\dfrac{4}{x}\right|$;

б) $\left|\dfrac{6}{x}-5\right|=kx-1$;

в) $|kx+2|=7-\dfrac{4}{x}$;

г) $|kx-1|=\dfrac{6}{x}-5$?

338. Для всех допустимых значений параметра a решите неравенство:

1) $\dfrac{x}{a+2}>2x-a$;

2) $\dfrac{x}{a-4}\geqslant 3x-2a$.

339. При каких значениях параметра a система уравнений:

1) $\begin{cases}4x+ay=2,\\ ax+y=1\end{cases}$ имеет бесконечное множество решений;

2) $\begin{cases}4x+ay=4,\\ ax+y=3\end{cases}$ не имеет решений?

340. Найдите все значения параметра a, при которых не имеет корней уравнение:
1) $ax^2 + 2ax + x = 1$; 2) $a^2x = a(x + 2) - 2$.

341. При каких значениях a параболы $y = x^2 + ax - a$ и $y = 2x^2 - x + a$ не имеют общих точек?

342. Найдите все значения a, для которых уравнение:
1) $x^2 - 2(a - 1)x + (2a + 1) = 0$ имеет два положительных корня;
2) $x^2 - 2(a - 2)x + a = 0$ имеет один корень;
3) $x^2 + (a - 3)x + a = 0$ имеет единственный положительный корень.

343. При каких значениях параметра уравнение:
1) $(b - 1)x^2 - 2bx + b + 1 = 0$;
2) $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 6 = 0$
имеет:
а) два положительных корня;
б) два отрицательных корня;
в) единственный корень;
г) корни разных знаков?

344. Определите, при каких значениях параметра a уравнение:
1) $\log_2(4^x - a) = x + 1$ имеет два корня;
2) $\log_3(9^x + a) = x$ имеет единственный корень.

345. Найдите число корней уравнения:
1) $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = a$; 2) $\dfrac{5x^2 + 7}{x^2 + 2} = a$.

346. Найдите все значения b, при которых уравнение $x^2 + x + b = 0$ имеет:
1) два корня, большие чем b;
2) один из корней больше, а другой меньше, чем b.

347. Найдите все значения параметра d, при которых неравенство $6x - 7 - dx^2 > 0$ имеет решения, причём все они меньше 1.

348. При каких значениях параметра:
1) оба корня квадратного уравнения $x^2 - 2bx - 1 = 0$ не превосходят по модулю 2;
2) уравнение $\sqrt{x - 1}\,(4x^2 - a^2x - 3a) = 0$ имеет два корня?

349. Найдите все значения параметра t, при которых каждое число на отрезке $[1; 2]$ является решением неравенства $x^2 - tx + 1 < 0$.

350. При каких значениях c на отрезке $[-1; 1]$ содержится только один корень уравнения $cx^2 + (2c - 1)x - 1 = 0$?

351. Найдите все значения параметра a, при которых:
1) оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат отрезку $[1; 3]$;
2) все нули функции $f(x) = (a - 2)x^2 + 2ax + a + 3$ лежат внутри интервала $(-2; 1)$.

352. При каких значениях a уравнения $x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = 0$, $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ имеют по два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения?

353. При каких значениях параметра a система
$\begin{cases} 2x^2 - 3ax - 9 > 0, \\ x^2 + ax - 2 < 0 \end{cases}$ не имеет решений?

354. Найдите все значения параметра m, при которых квадратный трёхчлен $x^2 + mx + m^2 + 6m$ отрицателен при всех значениях переменной x, удовлетворяющих неравенству $1 < x < 2$.

355. При каких значениях параметра a уравнение:
1) $\frac{x + a}{x + 1} + \frac{a - 3x}{x - 3} = 2$ имеет единственный корень;
2) $x^2 - 4x - 2|x - a| + 2 + a = 0$ имеет ровно два корня;
3) $|x^2 - 5x + 6| = ax$ имеет ровно три корня?

356. С помощью производной найдите значения a, при которых ровно два корня имеет уравнение:
1) $2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 0$;
2) $2x^3 + 3x^2 - 36x - a + 2 = 0$.

357. Решите уравнение, раскладывая на множители его левую часть:
1) $2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2 = 0$;
2) $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0$.

358. Введите параметр $a = \sqrt{2}$ и решите уравнение:

1) $x^4 - 2\sqrt{2}\,x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$;

2) $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$;

3) $2x^3 + x + \sqrt{2} = 0$.

359. При каких значениях параметра система неравенств:

1) $\begin{cases} ax - 1 \leqslant 0, \\ x - 4a \geqslant 0 \end{cases}$ имеет решение;

2) $\begin{cases} (x + p)^2 \geqslant 16, \\ x(x + 4) \leqslant p \end{cases}$ имеет единственное решение;

3) $\begin{cases} x^2 + bx - 2b^2 > 0, \\ b^2x^2 + 3bx - 4 < 0 \end{cases}$ не имеет решений;

4) $\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a + 1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений;

5) $\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (|y| - 6)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

360. Выясните, при каких значениях параметра a система уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$ не имеет решений;

2) $\begin{cases} y = x^2 + ax + a, \\ x = y^2 + ay + a \end{cases}$ имеет единственное решение.

361. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 2} + \dfrac{1}{\log_y 2} = 1, \\ y = a(x - 3) \end{cases}$ имеет единственное решение.

362. Найдите число решений системы уравнений в зависимости от значений параметра:

1) $\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = 3a - 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = a, \\ x + y = a. \end{cases}$

363. Решите уравнение относительно x:

1) $3\cos x = 4c + 1$;
2) $(b^2 - 9)\sin x = b + 3$;
3) $\cos 2x - a\cos x + a^2 + 1 = 0$;
4) $\sin^2 x - 2a\sin x + 2a^2 - 2a + 1 = 0$.

364. Найдите все значения параметра a, при которых область значений функции $y = a\sin x - 3|\cos x|$ содержит отрезок $[-6; 5]$.

365. При каких значениях параметра a на интервале $(0; \pi)$ уравнение $2\cos^2 x + (2a + 1)\sin x - a - 2 = 0$ имеет ровно: 1) один; 2) два; 3) три; 4) четыре корня?

366. При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение:

1) $\sqrt{|x|} = ax + 2$;
2) $\sqrt{2(|x| - x)} = ax + 2$;
3) $z|z + 2a| + 1 - a = 0$;
4) $1 + \{x\} = \cos^2 ax$?

367. При каких значениях параметров имеет единственное решение система уравнений:

1) $\begin{cases} 2xyz + y = a, \\ 2xy^2z + y = b, \\ 4(1 - x^2) = z^2 + y^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xyz + x = a, \\ x^2yz + x = b, \\ 4(1 - x^2) = z^2 + y^2? \end{cases}$

! Контрольные вопросы и задания

1. Что значит решить уравнение с параметром?
2. Какие условия должны выполняться, чтобы оба корня квадратного трёхчлена $ax^2 - 2a^2x - 2$ были больше 1? Найдите соответствующие значения a.
3. Решите неравенство $\log_a x > 2$.

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

19. Сумма и произведение событий

В предыдущих классах вы познакомились с понятием вероятности и научились находить вероятности различных событий. При вычислении вероятностей использовалась следующая схема.

Пусть проводится эксперимент, который может иметь несколько равновероятных исходов, и при некоторых из них должно произойти событие A.

Вероятность события A ищут по следующему плану.

(1) Находится число n всех возможных равновероятных исходов этого эксперимента.

(2) Находится число m тех из них, при которых происходит событие A. Эти исходы называют благоприятными для A.

(3) Вычисляется вероятность $P(A)$ события A, равная отношению $\frac{m}{n}$.

Именно с рассмотрения таких ситуаций и началось в XVII в. развитие теории вероятностей. Поэтому данная схема вычисления вероятности называется классической.

Задача 1. Рассмотрим ситуацию, возникающую при броске одной игральной кости. Пусть событие A заключается в том, что число выпавших очков больше 4. Найти вероятность события A.

Решение.

(1) При броске игральной кости есть всего **шесть** равновероятных исходов.

(2) Число очков окажется больше 4, если выпадет 5 или 6 очков, т. е. при **двух** исходах.

(3) $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Аналогично можно найти вероятность события B, которое заключается в том, что число выпавших очков окажется простым числом, т. е. что выпадет 2, 3 или 5:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Событие, которое заключается в том, что произойдёт и событие A, и событие B, записывают AB и называют *произведением событий* A и B.

В нашем случае событие AB заключается в том, что выпадет простое число очков, большее 4. Это произойдёт в *единственном* случае, при выпадении 5 очков. Таким образом, $P(AB) = \frac{1}{6}$.

В случае, если произойдёт событие A, т. е. число выпавших очков окажется больше 4, событие B имеет место только в **одном** (5 очков) из **двух** (5 или 6 очков) возможных исходов, и поэтому его вероятность равна $\frac{1}{2}$.

Вероятность события B при условии, что произойдёт событие A, обозначается $P(B/A)$ и называется ***условной вероятностью.***

Сравнивая $P(A)$, $P(AB)$ и $P(B/A)$, можно заметить, что они связаны равенством:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).}$$

Рассмотрим теперь событие, которое заключается в том, что произойдёт хотя бы одно из событий — A или B — или оба события вместе. Такое событие называют ***суммой событий*** A и B и записывают: $A + B$.

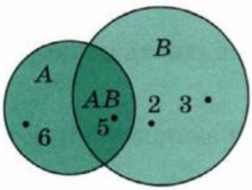


Рис. 112

В нашем случае сумма событий A и B заключается в том, что выпадет 2, 3, 5 или 6 очков. На диаграмме (рис. 112) показано, как в этом случае возможные исходы нашего опыта распределяются по событиям A, B и AB.

Событие A происходит при *двух* исходах, событие B происходит при *трёх* исходах, а событие AB — при *одном* исходе. Диаграмма помогает увидеть, что число исходов, при которых происходит событие $A + B$, равно $2 + 3 - 1$. Разделив полученную сумму на общее число исходов опыта, получим вероятность суммы событий A и B:

$$P(A+B) = \frac{2+3-1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Формула вероятности суммы событий

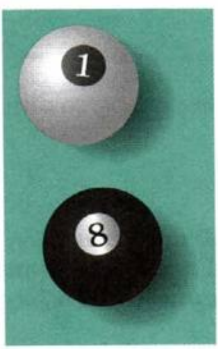
$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Рассмотрим ещё одну ситуацию.

Задача 2. Из коробки, в которой находится 4 белых и 6 чёрных бильярдных шаров, наугад вытаскивают сначала один, а затем второй шар. Найти вероятность события:
A — первый шар чёрный;
B — второй шар чёрный;
C — оба шара чёрные.

Р е ш е н и е. Проще всего найти, что

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$



Событие C является произведением событий A и B, $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$.

После того как из коробки достанут чёрный шар, в ней останется всего 9 шаров, 5 из которых — чёрные. Вероятность вытащить чёрный шар в этом случае равна $\frac{5}{9}$.

$$P(B/A) = \frac{5}{9}.$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

Найденное значение можно проверить непосредственным подсчётом числа вариантов при вытаскивании из коробки двух шаров.

1 Вытащить 2 шара из коробки с 10 бильярдными шарами можно A_{10}^2 способами:

$$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90.$$

2 Выбрать 2 из 6 чёрных шаров можно A_6^2 способами:

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

3 $P(AB) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

Будем теперь искать вероятность события B. Заметим сначала, что событие B складывается из двух событий:

1) первый шар чёрный, второй шар чёрный;

2) первый шар не является чёрным, а второй шар чёрный.

Обозначим с помощью черты сверху событие $\overline{A}$, ***противоположное событию*** A, т. е. событие, которое заключается в том, что событие A не происходит. В нашем случае событием $\overline{A}$ является вытаскивание первым белого шара. Тогда событие B можно записать в виде суммы: $B = AB + \overline{A}B$. Используя формулы вероятностей суммы и произведения, имеем:

$$P(B) = P(AB + \overline{A}B) = P(AB) + P(\overline{A}B) - P((AB)(\overline{A}B)) =$$
$$= P(A)P(B/A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A}) - P((AB)(\overline{A}B)).$$

Мы уже нашли, что $P(A)P(B/A) = \frac{1}{3}$.

Событие $\overline{A}$ происходит при 4 исходах из 10, значит,

$$P(\overline{A}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Если событие $\overline{A}$ произойдёт, то в коробке останется 9 шаров, 6 из которых чёрные. Значит, $P(B/\overline{A}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

События AB и $\overline{A}B$ вместе произойти не могут, так как первый шар, извлечённый из коробки, не может оказаться сразу и чёрным, и белым.

События, которые ни при каком исходе опыта не могут произойти вместе, называют ***несовместными***. Понятно, что их произведение является ***невозможным событием*** и имеет нулевую вероятность.

Таким образом, $P((AB)(\overline{A}B)) = 0$.

Подставим найденные значения в выражение для $P(B)$:

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A}) - P((AB)(\overline{A}B)) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} - 0 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Конечно, получить ответ можно было и проще, заметив, что все 10 шаров в коробке «равноправны», поэтому любой из них с равной вероятностью мог оказаться вторым. Однако в процессе решения была получена важная формула вероятности суммы несовместных событий.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B).}$$

Немного изменим условия опыта, описанного в задаче 2.

Задача 3. Пусть из коробки, в которой 6 чёрных и 4 белых бильярдных шара, сначала наугад вынимают один шар, затем возвращают его в коробку и снова наугад достают из неё шар. Найти вероятности событий: A — первый шар чёрный; B — второй шар чёрный; C — оба шара чёрные.

Решение. Изменения в опыте относятся только к условиям извлечения второго шара. Поэтому, как и в задаче 2, $P(A) = \frac{3}{5}$.

К моменту извлечения второго шара ситуация возвращается к исходному состоянию. Поэтому $P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, независимо от того, какой шар, чёрный или белый, был вытащен первым. Оказалось, что $P(B/A) = P(B)$.

События называют ***независимыми***, если $P(B/A) = P(B)$.

Вероятность события C, которое по-прежнему является произведением событий A и B, в этом случае оказывается равной произведению вероятностей этих независимых событий:

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$$

Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Это утверждение справедливо для любого числа независимых событий. Именно такая ситуация наиболее часто встречается при проведении серии опытов.

Задача 4. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет 6 очков. Число бросков записывается. Так, если при первом же броске кости выпадает 6 очков, то пишется 1, если при втором, то 2, и т. п. Затем опыт повторяется. В результате получается последовательность, состоящая из натуральных чисел. Какова вероятность того, что следующий член последовательности окажется равным 4?

Решение. Член последовательности будет равен 4, если только при четвёртом броске кости выпадет 6 очков, а при первых трёх бросках 6 очков не выпадет. При каждом броске кости, вне зависимости от результата предыдущего броска, вероятность выпадения 6 очков равна $\frac{1}{6}$, а вероятность того, что 6 очков не выпадет, равна $\frac{5}{6}$. Таким образом, нужно найти вероятность произведения четырёх независимых событий, вероятности первых трёх из которых равны $\frac{5}{6}$, а вероятность четвёртого равна $\frac{1}{6}$. По формуле вероятности произведения независимых событий имеем: $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296} = 0{,}0964\ldots$, что составляет чуть меньше 10%.

Задача 5. Проводится тест, состоящий из 10 вопросов. К каждому из вопросов предлагается на выбор три ответа, только один из которых верный. Чтобы получить зачёт, нужно указать не менее четырёх правильных ответов. Какова вероятность не получить зачёт, если выбирать ответы наугад?

Решение. Зачёт не будет получен в четырёх случаях:
если ни на один вопрос не будет дан верный ответ;
если верным будет только один ответ;
если верными будут только два ответа;
если верными будут только три ответа.

Все эти случаи являются несовместными событиями. Для ответа на вопрос задачи нужно найти вероятность их суммы, равную сумме вероятностей каждого из них.

1) Найдём вероятность $P(0)$ того, что все 10 ответов неправильные. Заметим, что выборы ответов на разные вопросы теста не зависят друг от друга. Вероятность угадать один правильный ответ из трёх равна $\frac{1}{3}$, а вероятность не угадать равна $\frac{2}{3}$. По формуле вероятности произведения независимых событий имеем:

$$P(0) = \overbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}^{10 \text{ множителей}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$$

2) Событие, заключающееся в том, что один ответ правильный, а остальные девять — нет, складывается из следующих 10 событий: правильный ответ дан на первый вопрос, на второй вопрос, ..., на десятый вопрос.

Все эти события несовместны, поэтому вероятность $P(1)$ суммы этих событий равна сумме их вероятностей. Вероятность каждого из событий равна произведению, состоящему из одного множителя, равного $\frac{1}{3}$, и девяти множителей, равных $\frac{2}{3}$. Таким образом, $P(1) = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9$.

3) Два верных ответа могут быть даны на любые два из 10 вопросов теста. Выбрать эти два вопроса можно $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ способами, поэтому вероятность $P(2)$ — угадать два верных ответа — равна

$$P(2) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8.$$

4) Наконец, вероятность $P(3)$ — угадать три ответа — равна:

$$C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 =$$
$$= 120 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7.$$

5) Остаётся вычислить сумму найденных вероятностей.

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) =$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^9 + 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8 + 120 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7 =$$
$$= \frac{2^7}{3^{10}} \left(2^3 + 10 \cdot 2^2 + 45 \cdot 2 + 120\right) = \frac{2^7 \cdot 258}{3^{10}} = \frac{2^7 \cdot 86}{3^9} \approx 0{,}559.$$

Вероятность не сдать зачёт оказалась равна 56%. Понятно, что вероятность сдать зачёт, т. е. вероятность противоположного события, равна 44%.

При решении этой задачи использовалась так называемая *схема Бернулли*.

> Если производится серия из n испытаний, в каждом из которых вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи $1 - p$, то вероятность $P(m)$ того, что ровно m испытаний в этой серии будут успешными, можно найти по формуле:
> $$\boldsymbol{P(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}.$$

Упражнения

368. Один раз бросается игральная кость. Событие A заключается в том, что число выпавших очков меньше четырёх. Событие B — число выпавших очков окажется простым числом. Найдите вероятность того, что на игральной кости:

1) выпадет число очков, меньшее четырёх;

2) число выпавших очков окажется простым числом;

3) число выпавших очков будет меньше четырёх и при этом окажется простым числом;

4) число выпавших очков окажется составным числом при условии, что выпало не меньше четырёх очков.

369. Из урны с белыми, чёрными и синими шарами извлекают один шар. Событие A означает появление белого шара, событие B — появление чёрного шара. Что означает событие: 1) $\bar{A}\bar{B}$; 2) $A + B$?

370. В урне находится 5 белых шаров, 3 чёрных шара, 2 в полоску и 7 в клетку. Какова вероятность того, что из урны будет извлечён одноцветный шар?

371. Один раз бросают игральную кость. Событие A состоит в выпадении чётного числа очков. Событие B — в выпадении числа очков, кратного трём. Событие C — в выпадении нечётного числа очков. Событие D — в выпадении простого числа очков. Найдите:

1) $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$;
2) $P(AB)$, $P(CD)$, $P(AD)$, $P(BD)$;
3) $P(A + B)$, $P(C + D)$, $P(A + D)$, $P(B + D)$;
4) $P(B/A)$, $P(C/D)$, $P(D/A)$, $P(D/B)$.

372. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов приходится выигрыш по 20 р., на 10 билетов — по 15 р., на 15 билетов — по 10 р., на 25 билетов — по 2 р., а остальные билеты проигрышные. Найдите вероятность того, что:

1) купленный билет выиграет не меньше 10 р.;
2) выигрыш составит 10 р., если известно, что билет выигрышный.

373. Известно, что в семье двое детей. Найдите вероятность того, что они оба мальчики, если известно: 1) что старший ребёнок мальчик; 2) что один из детей мальчик. Вероятности рождения мальчика или девочки считать равными 0,5.

374. На игральной кости грани с 1, 2 и 3 очками окрашены в белый цвет, а грани с 4, 5 и 6 — в чёрный.

1) Какова вероятность того, что выпадет чётное число очков, если выпадет чёрная грань?
2) Какова вероятность того, что выпадет чёрная грань, если выпадет чётное число очков?

375. Какова вероятность того, что взятая наугад кость домино окажется «дублем», если известно, что сумма очков на этой кости является:

1) чётным числом; 2) меньше 10; 3) больше 7?

376. В первом ящике 1 белый и 5 чёрных шаров, во втором 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика случайным образом вынимают по шару. Найдите вероятность того, что вынутые шары будут разного цвета.

377. В первой урне находится 7 чёрных и 5 белых шаров, во второй — 9 чёрных и 7 белых шаров. Из каждой урны наугад извлекают по одному шару.

1) Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

2) Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

3) Какова вероятность того, что шары будут разного цвета?

378. Два измерительных прибора работают независимо. Вероятность выхода из строя первого прибора равна 0,3, а вероятность выхода из строя второго прибора равна 0,4. Найдите вероятность того, что:

1) оба прибора выйдут из строя;

2) хотя бы один из приборов выйдет из строя;

3) ни один из приборов не выйдет из строя.

379. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при аварии сработает первый датчик, равна 0,95, а вероятность срабатывания второго датчика равна 0,9. Найдите вероятность того, что при аварии сработает только один датчик.

380. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трёх орудий таковы: $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}9$. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

381. Вероятность попадания в цель у первого стрелка равна 0,8, у второго — 0,9. Стрелки делают по выстрелу. Найдите вероятность:

1) двойного попадания;

2) хотя бы одного попадания;

3) одного попадания.

382. Студент разыскивает нужную ему формулу, которая может содержаться в трёх справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равны соответственно 0,6; 0,7 и 0,8. Найдите вероятность того, что формула содержится:

1) только в одном справочнике;
2) только в двух справочниках;
3) во всех трёх справочниках.

383. В условии предыдущей задачи найдите вероятность того, что студент найдёт формулу:
1) во втором справочнике;
2) в третьем справочнике;
3) не найдёт формулы в этих трёх справочниках.
Считать, что справочники рассматриваются в порядке их номеров и поиск прекращается при нахождении формулы.

384. Издательство отправило учебники в три школы. Вероятность своевременной доставки учебников в первую школу равна 0,7, во вторую — 0,8, в третью — 0,9. Найдите вероятности следующих событий:
1) ни одна из этих школ не получит учебники вовремя;
2) только одна из этих школ получит учебники вовремя;
3) хотя бы одна из этих школ получит учебники вовремя.

385. 10 солдат делают по одному выстрелу в цель. Для пяти из них вероятность попадания равна 0,6, для трёх — 0,5, а для остальных — 0,4. Какова вероятность поражения цели?

386. В классе 25 учеников, ни один из которых не родился 29 февраля. Какова вероятность того, что дни рождения хотя бы у двоих из них совпадут?

387. Поручик Ржевский, поручик Голицын и корнет Оболенский поссорились и решили стреляться. Договорились стреляться сразу втроём. С помощью жребия определили, что первым стреляет Ржевский, вторым — Голицын и последним — Оболенский. Каждый по очереди делает (если может) по одному выстрелу. Стрелки знают, что вероятность попадания при выстреле у Ржевского 0,8, у Голицына 0,7, а у Оболенского 0,5. При каждом выстреле цель выбирают так, чтобы у стреляющего было больше шансов в конечном итоге остаться на ногах. У кого из стрелков самые большие шансы? Какова вероятность остаться на ногах у Оболенского?

388. Ивестно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин — дальтоники[1]. Если наугад выбранное лицо окажется

[1] *Дальтонизм* — неспособность различать цвета, главным обра-зом красный и зелёный.

дальтоником, то какова вероятность, что это мужчина? (Считать, что количество мужчин и женщин одинаково.)

389. В типографии имеется четыре печатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она будет работать в любой конкретный момент времени, равна 0,9. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный для проверки момент времени будет работать хотя бы одна машина.

390. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попасть в цель хотя бы раз?

391. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырёх выстрелах равна 0,9984. Найдите вероятность попадания в цель при одном выстреле.

392.* Играющему в «Поле чудес» предлагают выбрать из трёх ящичков один, в котором лежит приз. После того как играющий сделал свой выбор, ведущий, который знает, в каком ящичке находится приз, показывает, что один из оставшихся двух ящичков пустой. Играющему предоставляется возможность изменить свой первоначальный выбор. Следует ли ему воспользоваться этой возможностью?

! Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры зависимых и независимых событий. Объясните равенство $P(BA) = P(AB)$. Как называются события A и B, если:

1) $P(B/A) = P(B)$;

2) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;

3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$?

2. Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность того, что шесть очков:

1) выпадет три раза;

2) выпадет два раза;

3) выпадет один раз;

4) не выпадет ни разу?

3. Имеется две одинаковые урны. Первая урна содержит 2 чёрных и 3 белых шара, вторая — 2 чёрных и 1 белый шар. Сначала произвольным образом выбирают урну, а затем из неё наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что будет извлечён белый шар?

20. Понятие о статистике

«Статистика знает всё: ...сколько какой пищи съедает средний гражданин, сколько в стране охотников, балерин... станков, собак, велосипедистов, памятников, девушек, маяков и швейных машинок» — так писали о статистике Илья Ильф и Евгений Петров в своём знаменитом романе «Двенадцать стульев».

Статистика занимается сбором и анализом информации, полученной в результате обследования большого числа различных объектов. Можно сказать, что статистика изучает состояние дел в различных областях. Поэтому своё название статистика ведёт от латинского слова status — «состояние». Методы статистики используются в медицине, биологии, социологии, маркетинге, педагогике и т. п. Так, например, при проверке нового лекарства его сначала дают ограниченному числу больных. Затем, в случае положительных результатов, это лекарство рекомендуют всем страдающим данным заболеванием. Понятно, что чем больше экспериментальная группа, тем убедительнее результат эксперимента. С другой стороны, чем многочисленнее группа, тем эксперимент дороже. Статистика даёт ответ на вопрос, сколько и каких больных следует выбрать для надёжности результата эксперимента.

В этом пункте вы познакомитесь с некоторыми основными характеристиками, которые используются при анализе статистической информации.

Рассмотрим задачу выставления четвертных оценок, которую много раз приходилось решать вашим учителям математики.

Задача 1. В третьей четверти Николай по алгебре и началам математического анализа получил следующие отметки: 4, 3, 3, 5, 5, 4, 5, 3, 2, 4, 5. Какую отметку за четверть заслужил Николай?

Решение. Всего отметок 11, и первая идея, которая приходит в голову, найти средний балл — *среднее арифметическое* всех полученных Николаем отметок:

$$\frac{4+3+3+5+5+4+5+3+2+4+5}{11} = \frac{43}{11} \approx 4.$$

Можно рассуждать и иначе. *Ранжируем* последовательность отметок Николая, т. е. выпишем отметки в порядке возрастания:

$$2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5.$$

Четвёрка, которая выделена в этом ряду отметок, находится точно посередине — перед ней и после неё стоит по 5 отметок.

Среднее число в ранжированном ряду данных называют ***медианой ряда***.

Выбрав медиану вместо среднего арифметического, получили ту же самую четвертную отметку. Заметим, что больше всего среди отметок Николая пятёрок, т. е. пятёрки он получал чаще всего.

Число, встречающееся в ряду данных чаще других чисел, называют ***модой ряда***.

Вряд ли моду ряда отметок Николая следует взять в качестве четвертной, так как пятёрки у него составляют лишь чуть больше трети всех оценок.

Ответ: Николай заслужил отметку «4».

Задача 2. Сергей в той же четверти получил 10 отметок: 3, 3, 4, 5, 5, 4, 5, 4, 5, 5. Какую четвертную отметку поставить Сергею за четверть?

Решение. Найдём среднее арифметическое отметок Сергея:

$$\frac{3+3+4+5+5+4+5+4+5+5}{10} = 4{,}3.$$

Ранжируем последовательность Серёжиных отметок и найдём её медиану.

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ 5,\ 5,\ 5,\ 5.$$

В ряду чётное число членов, поэтому среднего члена в нём нет. В таких случаях берут средние два члена и считают медианой их среднее арифметическое: $\frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

Модой ряда отметок является число 5, так как половина всех Серёжиных отметок — пятёрки.

Ответ: за четверть Сергею можно поставить как оценку «4», так и «5».

Заметим, что не у каждого ряда данных мода единственная.

Так, например, в ряду 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5 по три раза встречаются числа 4 и 5, а числа 2 и 3 — по два раза. Таким образом, у этого ряда две моды: 4 и 5.

В ряду отметок Николая есть и двойки, и пятёрки, а среди отметок Сергея двоек нет.

Разность наибольшего и наименьшего из значений ряда называют его ***размахом***.

Таким образом, размах отметок Николая равен трём, а Сергея — двум.

Ещё одной важной характеристикой ряда данных является рассеяние результатов — насколько результаты отличаются от их среднего арифметического. Так, среднее арифметическое отметок Сергея равно 4,3. Отметка «3» отклоняется от среднего арифметического на $3 - 4{,}3 = -1{,}3$, отметка «4» — на $4 - 4{,}3 = -0{,}3$, а отметка «5» на $5 - 4{,}3 = 0{,}7$. Чтобы знаки «минус» у некоторых отклонений не искажали картину рассеяния результатов, договорились рассматривать не сами отклонения, а их квадраты.

Среднее арифметическое квадратов отклонений значений ряда от среднего арифметического самих значений называют ***дисперсией ряда***.

Дисперсия ряда 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5 отметок Сергея равна:

$$\frac{2 \cdot (-1{,}3)^2 + 3 \cdot (-0{,}3)^2 + 5 \cdot (0{,}7)^2}{10} = 0{,}61.$$

Для выставления четвертной оценки статистические методы, как правило, не применяют. Статистика оперирует с большими массивами данных, и один из важных вопросов состоит в том, как эти данные представить.

Задача 3. В двух районах проводилась контрольная работа по математике. В одном районе её писали 1875 школьников, а в другом — 2687. В первом районе получили отметки: «2» — 376 школьников, «3» — 731, «4» — 604, «5» — 164, а во втором районе: «2» — 430, «3» — 1236, «4» — 752, «5» — 269. Как сравнить успехи учеников этих районов?

Решение. Найдём статистические характеристики для оценок каждого района. Так, мода и медиана в обоих районах оказались равными 3. А среднее арифметическое оценок в первом районе:

$$\frac{2 \cdot 376 + 3 \cdot 731 + 4 \cdot 604 + 5 \cdot 164}{1875} \approx 3{,}5 \text{ —}$$

несколько больше, чем во втором:

$$\frac{2 \cdot 430 + 3 \cdot 1236 + 4 \cdot 752 + 5 \cdot 269}{2687} \approx 3{,}3.$$

Для сравнения успехов школьников результаты, показанные в обоих районах, удобнее выразить в процентах. В первом районе получили отметки: «2» — 20% писавших работу, «3» — 39, «4» — 32, «5» — 9%, а во втором районе: «2» — 16%, «3» — 46, «4» — 28, «5» — 10%.

В таком виде легко сравнить так называемые *проценты успеваемости* и *качество знаний* учащихся. *Процент успеваемости* показывает, сколько процентов школьников выполнили работу на «3», на «4» и на «5», *качество знаний* — сколько процентов школьников получили за работу «4» и «5». Сравнивая два района по этим параметрам, видим, что процент успеваемости во втором районе выше, а качество знаний — ниже, чем в первом.

Ответ: во втором районе выше процент успеваемости, а в первом районе выше качество знаний.

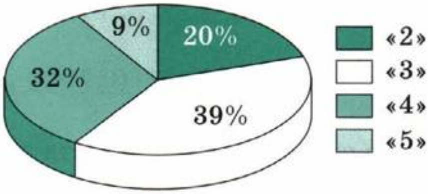


Рис. 113

Для повышения наглядности часто используют ***диаграммы***. Так, например, информацию об оценках в первом районе можно выразить в виде ***круговой диаграммы*** (рис. 113).

Ту же самую информацию можно изобразить в виде ***столбчатой диаграммы***, которую обычно называют ***гистограммой*** (рис. 114).

В отличие от круговой диаграммы, гистограмму можно использовать и для сравнения данных. Так, на следующей гистограмме (рис. 115) одновременно показаны результаты контрольной работы в первом районе (светлые столбики) и во втором районе (тёмные столбики).

В следующем примере в ряде данных имеется слишком много значений, чтобы говорить о каждом из них отдельно. В таких случаях данные обычно группируют. Это делает соответствующую информацию обозримой.

Задача 4. В таблице (см. с. 193) представлены результаты испытаний электронных ламп, произведённых на некотором заводе, на продолжительность работы. Какова средняя продолжительность работы ламп?

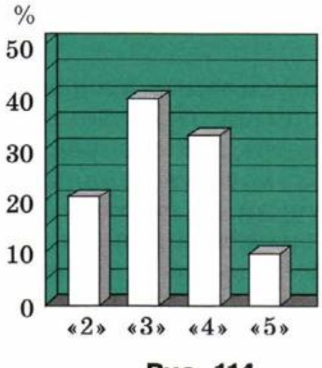


Рис. 114

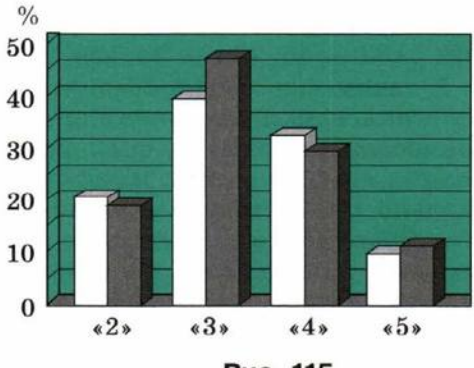


Рис. 115

T, ч	n	f
0—300	53	0,265
300—600	41	0,205
600—900	30	0,150
900—1200	22	0,110
1200—1500	16	0,080
1500—1800	12	0,060
1800—2100	9	0,045
2100—2400	7	0,035
2400—2700	5	0,025
2700—3000	3	0,015
3000—3300	2	0,010
Более 3300	0	0

Решение. Данные, приведённые в таблице, можно указать и с помощью гистограммы (рис. 116).

Всего испытывались $53 + 41 + 30 + 22 + 16 + 12 + 9 + 7 + 5 + 3 + 2 = 200$ ламп, 53 из них проработали меньше 300 ч, 41 лампа проработала более 300, но менее 600 ч. Ни одна лампа из 200 не проработала больше 3300 ч. Несмотря на то что в таблице не указано точное время работы каждой из испытывавшихся ламп, полученная информация позволяет сделать вывод о том, что модой этого ряда является работа лампы менее 300 ч, медианой — работа лампы от 600 до 900 ч. Для вычисления среднего арифметического продолжительности работы ламп будем считать, что каждая из них проработала максимальный срок, т. е. 53 лампы проработали по 300 ч, 41 — по 600 ч и т. д. Тогда среднее арифметическое равно

$$\frac{53 \cdot 300 + 41 \cdot 600 + 30 \cdot 900 + \ldots + 2 \cdot 3300}{200} \approx 1000 \text{ (ч)}.$$

При вычислении средней продолжительности можно использовать третью колонку таблицы, в которой указана час-

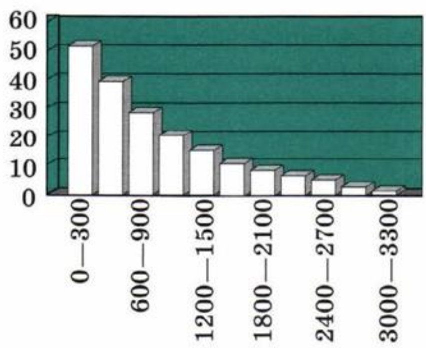


Рис. 116

тота соответствующего результата эксперимента, т. е. отношение числа ламп, проработавших некоторое количество часов, к числу всех испытывавшихся ламп. Так, частота проработавших менее 300 ч ламп равна $f = \frac{53}{200} = 0{,}265$.

Значит, *среднюю продолжительность работы лампы* можно найти как сумму произведений срока работы лампы (T) на его частоту (f):

$$300 \cdot 0{,}265 + 600 \cdot 0{,}205 + 900 \cdot 0{,}150 + 1200 \cdot 0{,}110 + \ldots$$
$$\ldots + 3000 \cdot 0{,}015 + 3300 \cdot 0{,}010 \approx 1000 \text{ (ч)}.$$

Ответ: 1000 ч.

В рассмотренном примере вероятность той или иной продолжительности работы случайным образом выбранной лампы не была известна и найти её по плану, сформулированному в начале предыдущего пункта, было нельзя, поскольку возможные исходы испытания лампы очевидно не являлись равновероятными. Однако при увеличении числа испытываемых ламп можно заметить, что частота того или иного срока работы ламп всё меньше отличается от некоторого числа, которое и принимается за вероятность соответствующего исхода.

Представление о вероятности события как о *пределе, к которому стремится частота события при увеличении числа испытаний*, было разработано английским учёным Дж. Венном в 60-х гг. XIX в.

Если знать вероятности всех возможных несовместных результатов, то можно ожидать, что среднее арифметическое результатов в серии испытаний будет близко к *сумме произведений результатов на их вероятности*.

Сумму произведений возможных результатов испытания на их вероятности называют ***математическим ожиданием***.

Задача 5. Вычислить математическое ожидание числа очков при бросании игральной кости.

Решение. Вероятность каждого возможного результата при бросании игральной кости равна $\frac{1}{6}$. Математическое ожидание равно:

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

Конечно, получить такой результат нельзя, так как он попросту невозможен, однако, бросив игральную кость несколько раз, можно ожидать, что средний результат окажется близким к числу 3,5, причём тем ближе, чем больше бросков будет сделано.

Понятие «математическое ожидание» происходит от представлений игроков об ожидаемом выигрыше. Впервые это понятие появилось в трудах французского математика Б. Паскаля и голландского математика X. Гюйгенса в XVII в. Термин «математическое ожидание» ввёл французский астроном, математик и физик П. Лаплас в 1795 г. В полной мере это понятие было оценено и использовано русским математиком и механиком Пафнутием Львовичем Чебышёвым в середине XIX в.

Вы познакомились с основными характеристиками, которые используются в статистике. Однако мы не коснулись, пожалуй, самого важного вопроса о том, как получать достоверные выводы обо всей совокупности исследуемых *объектов* (*генеральной совокупности*), изучая лишь часть из них (*выборку*). Так, например, с помощью интернет-опроса вряд ли можно получить достоверную информацию о нуждах российских пенсионеров, поскольку лишь у незначительной их части есть Интернет.

Трудно также рассчитывать на объективность выводов о доходах москвичей, опрашивая покупателей сети дорогих магазинов. Таким образом, соответствующая выборка может позволить статистике получить не объективный, а желаемый результат. Поэтому британский премьер-министр конца XIX в. Б. Дизраэли сказал: «Есть три вида лжи: обычная ложь, наглая ложь и статистика». К сожалению, многие современные опросы общественного мнения показывают, что слова Дизраэли по-прежнему актуальны.

Упражнения

393. 1) Найдите медиану ряда, представленного ранжированной выборкой, содержащей нечётное количество членов:

12, 14, 14, 18, 20, 22, 22, 26, 28.

2) Найдите медиану ряда, представленного ранжированной выборкой, содержащей чётное количество членов:

$$6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24.$$

3) Сделайте вывод. Как найти медиану ряда, содержащего чётное количество чисел? Как найти медиану ряда, содержащего нечётное количество чисел?

394. Приведены ранжированные данные в секундах результатов бега на 100 м юношей 11 класса:

$$12{,}8;\ 13{,}7;\ 14{,}2;\ 15{,}0;\ 15{,}2;\ 15{,}6;\ 15{,}8;$$
$$16{,}0;\ 16{,}0;\ 16{,}3;\ 16{,}6;\ 16{,}9;\ 17{,}7.$$

1) Найдите: а) размах ряда; б) среднее арифметическое ряда; в) медиану ряда; г) моду ряда.

2) Какую из средних характеристик, по вашему мнению, лучше всего использовать, чтобы охарактеризовать спринтерскую подготовку юношей этого класса?

395. Запишите число страниц, на которых располагается каждый из первых 10 пунктов данного учебника. Ранжируйте получившийся ряд. Чему равен размах ряда? Найдите среднее арифметическое, моду и медиану этого ряда.

396. На предприятии работают 100 человек: директор, зарплата которого составляет 1 000 000 р. в месяц, и 99 служащих, каждый из которых получает по 10 000 р. в месяц. Служащие потребовали повысить им зарплату, так как практически все работники предприятия получают по 10 000 р. Однако директор отказал им, объяснив, что средняя зарплата на предприятии составляет около 20 000 р. Какая из характеристик: среднее арифметическое, мода или медиана — лучше отражает ситуацию с зарплатой на предприятии?

397. При определении размеров верхней одежды (n) у женщин, выбранных случайным образом, полученные данные представили в виде гистограммы (рис. 117).

По гистограмме ответьте на следующие вопросы.

1) Сколько женщин (m) участвовало в опросе?

2) Какая величина отмечена на оси абсцисс?

3) Какая величина отмечена на оси ординат?

4) Чему равны мода, медиана и среднее арифметическое (средний размер одежды)?

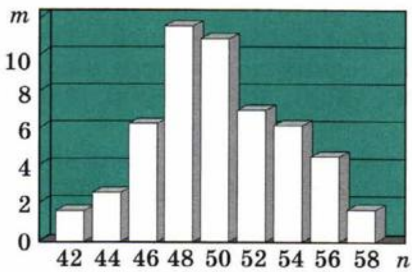


Рис. 117

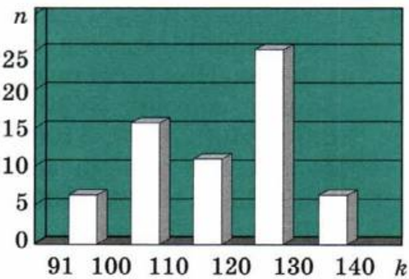


Рис. 118

398. Школьники соревновались на скорость чтения, т. е. определяли, какое количество слов в минуту (k) может прочитать каждый из них. Данные, полученные в ходе соревнования, представлены на гистограмме (рис. 118).

По гистограмме определите:

1) число (n) соревновавшихся;

2) размах и средние характеристики совокупности результатов.

399. Провели измерения размеров обуви у мужчин и женщин.

Размеры обуви женщин: 25; 24; 23,5; 24,5; 23; 24,5; 22,5; 23; 23,5; 24; 23,5; 23; 24; 23; 24; 24; 23,5; 24; 23,5; 24; 23,5; 24; 24,5; 23,5; 24,5; 24,5; 22,5; 24; 24,5; 25; 22,5; 24; 25; 23,5; 24; 25; 23,5; 25; 24,5; 23,5; 25,5; 23; 24,5; 25,5; 23,5; 24; 26; 24,5; 23,5; 24.

Размеры обуви мужчин: 28,5; 27,5; 27; 28; 26,5; 27,5; 25,5; 27; 27,5; 26; 26,5; 28; 25,5; 26,5; 27; 26,5; 25,5; 27; 26; 27; 26,5; 27; 26; 27; 26,5; 27; 26; 27,5; 26,5; 27,5; 28; 27,5; 28; 27; 27,5; 28; 26; 28,5; 26; 25,5; 28,5; 29; 27,5; 26; 28; 26,5; 26; 27; 27,5; 28.

1) Постройте гистограммы размеров обуви женщин и мужчин по данным выборок.

2) Каких размеров женской и мужской обуви фабрике следует выпускать больше?

400. Из горы хлопка наугад вытащили пучки и измерили длину волокон хлопка в сантиметрах. Результаты первых 20 замеров оказались следующими:

2,10; 2,23; 2,14; 2,16; 2,56; 2,05; 2,20; 2,34; 2,18; 1,95; 2,21; 2,46; 2,28; 1,95; 2,54; 2,12; 2,05; 2,15; 2,18; 2,21.

1) Постройте гистограмму длины волокон в пучках.

2) Охарактеризуйте полученные данные.

401. Приведены показатели объёма лёгких (в миллилитрах) учеников 11 класса до поездки в спортивный лагерь и после. Показатели объёма лёгких до поездки в спортивный лагерь: 3400, 3600, 3000, 3500, 2900, 3100, 3200, 3400, 3200, 3400.

Показатели объёма лёгких после летнего сезона: 3800, 3400, 3300, 3600, 3100, 3200, 3200, 3300, 3500, 3600.

1) Ранжируйте ряды.

2) Найдите: а) размахи рядов; б) средние арифметические рядов; в) медианы рядов; г) моды рядов.

3) Какая характеристика лучше характеризует каждый ряд?

4) Постройте сравнительную гистограмму объёма лёгких учеников до поездки в спортивный лагерь и после.

402. При наборе в баскетбольную секцию кандидатам предлагалось выполнить по 10 бросков в корзину. Подсчитывалось число n попаданий каждого из кандидатов. В таблице представлена информация о результатах, показанных желающими заниматься в секции.

Число попаданий n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число кандидатов, попавших n раз	5	8	13	21	25	21	16	10	3	2	1
Частота результата, %	4	6,4	10,4	16,8	20	16,8	12,8	8	2,4	1,6	0,8

1) Постройте гистограмму частот результатов попадания.

2) Найдите среднее (среднее арифметическое) число попаданий кандидата.

403. В таблице приведены данные о годовом надое молока от коров некоторой фермы.

Надой, тыс. л	1,6—2,2	2,2—2,8	2,8—3,4	3,4—4,0	4,0—4,6	4,6—5,2	5,2—5,8	5,8—6,2
Количество коров, шт.	4	14	17	37	15	6	4	3

Найдите: 1) единицу измерения надоя молока; 2) число коров на ферме; 3) величину промежутков разбиения показателей надоев; 4) средние показатели надоев; 5) математическое ожидание годового надоя молока от коровы.

404. 1) Выпишите из дневника свои оценки за этот учебный год: а) по математике; б) по русскому языку.

2) Найдите средние характеристики этих рядов. Каких годовых отметок вы заслуживаете?

3) Постройте сравнительную гистограмму своих отметок по математике и по русскому языку. Какие выводы можно сделать по этой гистограмме?

405. Найдите в газетах статистические данные, представленные в виде гистограммы. Проанализируйте эту информацию. Укажите средние статистические характеристики этих данных.

406. 10 солдат по одному разу стреляют в одну и ту же мишень. У пяти из них вероятность попадания в мишень равна 0,6, у двух — 0,5, а у остальных — 0,3. Найдите математическое ожидание числа попаданий в мишень.

407. Найдите математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании двух игральных костей.

! Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите средние характеристики рядов чисел. Как они вычисляются?

2. Ученики 11 класса проводили хронометраж времени, которое они тратят на просмотр телепередач. Полученные данные занесли в таблицу.

Кол-во часов	Менее 1	1—2	2—3	3—4	4—5	Более 5
Кол-во учеников	1	5	7	12	4	1

Найдите:

1) число учеников в классе;
2) среднее время просмотра;
3) моду;
4) медиану.

Глава 7

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Первыми числами, с которыми вы познакомились, были натуральные. Затем появились целые, рациональные и действительные числа. Каждое новое множество чисел содержало предшествующее и расширяло вычислительные возможности. Так переход от натуральных чисел к целым позволил вычитать из меньшего числа большее, переход к рациональным числам снял ограничения с деления (кроме деления на нуль), а действительные числа дали возможность вычислять корни. Однако вычисление корней чётных степеней из отрицательных чисел остаётся невозможным и на множестве действительных чисел. Снять это ограничение должна последняя глава нашего учебника, которая познакомит вас с самым широким числовым множеством — множеством комплексных чисел.

21. Формула корней кубического уравнения

К концу XIV в. европейские математики познакомились с основными достижениями античной, арабской и индийской науки, однако сами ещё не внесли существенного вклада в развитие математики. В частности, в вопросе решения уравнений знания ограничивались квадратными уравнениями и системами уравнений, приводившими к решению квадратных уравнений. Из кубических и других уравнений высших степеней удавалось решить лишь некоторые. Сложилось мнение, что все значительные результаты в математике уже достигнуты. Поэтому открытие итальянскими математиками XVI в. способа решения любых кубических уравнений произвело огромное впечатление на учёных того времени. Убедившись, что труды древних далеко не исчерпали возможностей науки, европейские математики стали активно заниматься научными исследованиями.

Первым способ решения кубических уравнений нашёл Сципион дель Ферро[1] — профессор из Болоньи. Узнав об этом, венецианский математик Никколо Тарталья[2], готовясь в 1535 г. к математическому поединку с одним из учеников дель Ферро, самостоятельно вывел формулу корней кубического уравнения. Как и его предшественник, Тарталья не стал сообщать о своём открытии — владение «секретом» позволяло добиваться побед в конкурсах на занятие профессорских должностей.

Впервые формулу корней

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

для уравнений вида $x^3 + px + q = 0$ опубликовал в 1545 г. миланский врач и математик Джеронимо Кардано в своём большом математическом труде «Великое искусство». И хотя Кардано узнал формулу от Тартальи, её стали называть формулой Кардано. Эта формула известна всем математикам, однако воистину знаменитым имя Кардано сделал изобретённый им *карданный* вал.

Может показаться, что формула Кардано относится только к частному случаю кубических уравнений, у которых коэффициент при x^2 равен нулю. Однако любое кубическое уравнение можно легко привести к такому виду простой заменой переменной.

Пример 1. Решить уравнение $y^3 - 3y^2 + 9y - 14 = 0$.

Решение. Сначала с помощью замены y на $x + 1$ избавимся от члена, содержащего вторую степень переменной:

$$y^3 - 3y^2 + 9y - 14 = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 9(x+1) - 14 =$$

$$= x^3 + \underline{3x^2} + 3x + 1 - \underline{3x^2} - 6x - 3 + 9x + 9 - 14 = x^3 + 6x - 7.$$

---

[1] *Сципион дель Фéрро* (1465—1526) — итальянский математик. С его именем связано открытие правила решения в радикалах одного типа кубических уравнений.

[2] *Никколо Тартáлья* (1499—1557) — итальянский учёный. Основные труды его написаны по математике, механике, баллистике, геодезии, фортификации.

Мы получили уравнение $x^3 + 6x - 7 = 0$, к которому и применим теперь формулу Кардано:

$$x = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} + 8}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} + 8}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{9}{2}} = 2 - 1 = 1.$$

Конечно, этот корень намного легче получить, заметив, что сумма коэффициентов многочлена $x^3 + 6x - 7$ равна нулю.

Найдя один корень, можно с помощью деления уголком на $x - 1$ или с помощью схемы Горнера разложить многочлен $x^3 + 6x - 7$ на множители: $x^3 + 6x - 7 = (x - 1)(x^2 + x + 7)$. Поскольку второй множитель в нуль не обращается, сделаем вывод о единственности найденного корня. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $y = 2$.

При использовании формулы Кардано математики встретились с неожиданным препятствием. Применим формулу Кардано к уравнению $x^3 - 6x - 4 = 0$:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 8}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}.$$

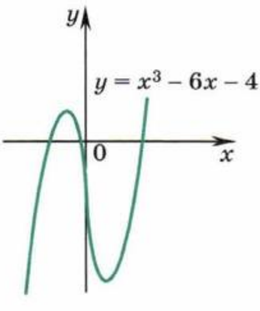


Рис. 119

Получилось выражение, которое не имеет смысла, так как не существует действительного числа, квадрат которого равен -4. Однако само уравнение, конечно, имеет корни, причём нетрудно, построив, например, схематический график функции $y = x^3 - 6x - 4$, убедиться в том, что у этого уравнения их три (рис. 119). Можно также среди делителей свободного члена отыскать число -2, которое является корнем этого уравнения и, разложив левую часть на множители:

$$x^3 - 6x - 4 = (x + 2)(x^2 - 2x - 2),$$

найти ещё два его корня: $1 + \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{3}$.

Упражнения

408. Используя формулу Кардано, решите кубическое уравнение:

1) $x^3 + 6x + 2 = 0$;
2) $x^3 + 12x - 12 = 0$;
3) $x^3 + 15x - 124 = 0$;
4) $x^3 + 5x - 84 = 0$.

409. Приведите к виду $x^3 + px + q = 0$ уравнение:
1) $x^3 + 9x^2 - 15x + 36 = 0$;
2) $2x^3 - 12x^2 + 54x - 36 = 0$.

410. Найдите кратчайшее расстояние от точки $A(4; 0)$ до параболы $y = x^2$.

! Контрольные вопросы

1. С каким затруднением встретились математики при использовании формулы Кардано?

2. Как вы думаете, почему проблема нехватки чисел возникла при использовании формулы корней кубических уравнений, а не квадратных, в которых дискриминант может оказаться отрицательным числом?

22. Алгебраическая форма комплексного числа

Проблема, возникшая в связи с использованием формулы Кардано, требовала расширения понятия числа за счёт введения новых чисел и правил действий с ними. Однако Кардано этого сделать не удалось. Успех пришёл к другому итальянскому математику и инженеру, Рафаэлю Бомбелли (1526—1572). В книге «Алгебра» (1572) он подробно рассмотрел различные случаи, которые встречаются при решении кубических уравнений. Идея Бомбелли была гениально проста: *действовать с корнями из отрицательных чисел по тем же правилам, что и с многочленами.*

Знакомство с этими новыми числами, получившими в дальнейшем название *комплексных*[1], начнём с решения квадратных уравнений. Ведь именно при их решении впервые встретился квадратный корень из отрицательного числа.

Используем формулу корней для решения квадратного уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0$:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9}.$$

[1] Термин «комплексные», от латинского слова complexus — «соединение», ввёл Карл Гаусс в 1831 г.

До сих пор вы считали, что такие выражения не имеют смысла. Действительно, ни среди рациональных, ни среди иррациональных чисел нет числа, квадрат которого равен -9, а следовательно, данное уравнение не имеет действительных корней.

Попробуем теперь рассматривать выражения, содержащие квадратные корни из отрицательных чисел, применяя к ним, как Р. Бомбелли, те же правила действий, что и к действительным числам.

Прежде всего заметим, что квадратный корень из отрицательного числа можно представить в виде произведения действительного числа и квадратного корня из числа -1, например:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}.$$

Выражение $\sqrt{-1}$ по предложению Л. Эйлера стали обозначать буквой i (первой буквой латинского слова imaginarius — мнимый) и называть *мнимой единицей*.

Мнимая единица — это число, квадрат которого равен -1:

$$\boldsymbol{i^2 = -1}.$$

Используя это обозначение, можно записать, что

$$x_{1;\,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i.$$

Каждое из выражений $2 + 3i$ и $2 - 3i$ состоит из двух частей: действительной (число 2) и мнимой (соответственно $3i$ и $-3i$).

Выражение вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — мнимая единица, называют ***комплексным числом***.

Если коэффициент b мнимой части комплексного числа равен нулю, то получается действительное число a. При $a = 0$ комплексное число $a + bi$ называют ***чисто мнимым***.

Равенство двух комплексных чисел означает равенство их действительных частей и коэффициентов их мнимых частей:

$$\boldsymbol{a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}}$$

Проверим теперь, что число $2 - 3i$ действительно является корнем уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0$, т. е. что

$$(2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 = 0.$$

Раскроем скобки в левой части равенства:

$$(2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 = 4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13.$$

Заменим i^2 числом -1 и приведём подобные члены:

$$4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13 = 4 - 12i - 9 - 8 + 12i + 13 = 0.$$

Аналогично можно убедиться и в том, что мнимое число $2 + 3i$ тоже является корнем этого уравнения.

Введение комплексных чисел сняло ограничение с дискриминанта квадратного уравнения — каждое квадратное уравнение имеет комплексный корень.

Основная теорема алгебры[1]

Любое целое рациональное уравнение имеет комплексный корень.

Из этой теоремы, в частности, следует, что многочлен степени n с комплексным переменным z можно представить в виде произведения n линейных множителей:

$$P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n =$$
$$= a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-1})(z - z_n),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные корни многочлена, причём необязательно различные.

▼ Доказать это можно с помощью теоремы Безу, по которой и на множестве комплексных чисел $P_n(z) = (z - z_n)Q_{n-1}$, где $P_n(z)$ и $Q_{n-1}(z)$ — многочлены степени n и $n - 1$ соответственно, а z_n — корень многочлена $P_n(z)$. △

---

[1] Основная теорема алгебры была сформулирована в XVII в., но первое строгое доказательство было дано в конце XVIII в. К. Гауссом. С тех пор были опубликованы десятки различных доказательств. Чисто алгебраического способа доказательства этой теоремы не существует — приходится использовать методы математического анализа, что говорит о неразрывности математической науки в целом.

Покажем на примере квадратного уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0$, что в случае мнимых корней верны формулы Виета. Сумма корней данного уравнения должна быть равна числу 4:

$$(2 - 3i) + (2 + 3i) = 2 - 3i + 2 + 3i = 4,$$

а произведение — числу 13:

$$(2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$$

Во всех рассмотренных примерах с комплексными числами производились арифметические действия[1].

Результат арифметических действий с комплексными числами можно представить в виде комплексного числа $x + yi$, где x и y — действительные числа:

1) $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i;$

2) $(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i;$

3) $(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (bc + ad)i;$

4) $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 + d^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$, где хотя бы одно из чисел c или d должно быть отлично от нуля.

В последнем случае, чтобы получить в знаменателе действительное число, числитель и знаменатель умножили на комплексное число $c - di$, отличающееся от знаменателя $c + di$ только знаком коэффициента мнимой части.

Комплексные числа $z = c + di$ и $\overline{z} = c - di$ называют ***сопряжёнными***.

Приём умножения дроби на сопряжённое знаменателю число часто используется в преобразованиях выражений с комплексными числами.

[1] Мы уже отмечали, что в 1572 г. вышла книга итальянского математика Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над комплексными числами, вплоть до извлечения из них кубических корней.

Пример 1. Упростить выражение $\frac{2i}{3-i}$.

Решение.

$$\frac{2i}{3-i} = \frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{2(3i+i^2)}{3-i^2} = \frac{2(-1+3i)}{3+1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Пример 2. Найти все действительные значения x и y, при которых числа $y^2 - \frac{x}{i} - 2x + 4i$ и $3 - \frac{y^2}{i} - 3xi$ равны между собой.

Решение. Приведём оба данных числа к виду $a + bi$, где a и b действительные числа:

$$y^2 - \frac{x}{i} - 2x + 4i = y^2 - \frac{xi}{i^2} - 2x + 4i =$$

$$= y^2 + xi - 2x + 4i = (y^2 - 2x) + (x + 4)i,$$

$$3 - \frac{y^2}{i} - 3xi = 3 + y^2 i - 3xi = 3 + (y^2 - 3x)i.$$

Приравняв действительные части и коэффициенты при мнимых частях этих чисел, получим и решим систему:

$$\begin{cases} y^2 - 2x = 3, \\ x + 4 = y^2 - 3x, \end{cases} \begin{cases} y^2 = 2x + 3, \\ x + 4 = 2x + 3 - 3x, \end{cases} \begin{cases} y^2 = -1 + 3, \\ x = -\frac{1}{2}, \end{cases} \begin{cases} y = \pm\sqrt{2}, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$, $y = \sqrt{2}$ или $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{2}$.

Упражнения

411. Решите квадратное уравнение:

1) $x^2 + 10x + 26 = 0$;
2) $x^2 - 14x + 74 = 0$;
3) $9x^2 - 6x + 5 = 0$;
4) $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

412. Подберите целый корень и, разложив левую часть на множители, найдите все корни уравнения:

1) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$;
2) $x^3 - 2x^2 + 2x + 5 = 0$;
3) $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0$;
4) $2x^3 - 7x^2 + 11x - 10 = 0$;
5) $4x^3 - 2x^2 - 27x - 9 = 0$.

413. С помощью формул Виета составьте квадратное уравнение, корнями которого являются мнимые числа:

1) $1 + i$ и $1 - i$; 2) $-3 + 4i$ и $-3 - 4i$.

414. Приведите к виду $x + yi$, где x и y — действительные числа, выражение:

1) $(3 - 2i)(i - 3)$; 3) $\frac{2}{1-i}$; 5) $\frac{2-5i}{1+i}$;

2) $(5 - 2i)(4 + 2i)$; 4) $\frac{5i}{3-4i}$; 6) $\frac{3-4i}{1-3i}$.

415. При каком условии:

1) сумма;

2) разность;

3) произведение;

4) частное двух комплексных чисел является действительным числом?

416. Найдите значение выражения:

1) $z^3 - 4z^2 + 28z$ при $z = 2 - 5i$; 3) $\frac{5-2i}{1+i} + \frac{5+2i}{1-i}$;

2) $z^3 + 7z^2 + 16z$ при $z = -3 + i$; 4) $\frac{10-6i}{1-3i} + \frac{10+6i}{1+3i}$.

417. Найдите действительные числа a и b, если:

1) $(1 + 4i)(a + bi) = 14 + 5i$;

2) $\frac{32-i}{a+bi} = 3 - 2i$;

3) $2i + ab - abi = a^2 - b^2i - 3$.

418. При каких действительных значениях a и b равны комплексные числа z_1 и z_2:

1) $z_1 = \frac{2i}{a} + 4 - bi$; $z_2 = 3i - \frac{7}{a} + 2b$;

2) $z_1 = (2 + 3i)a - 8i$; $z_2 = 7 - (2 - 3i)(a + bi)$?

419. При каких действительных значениях x и y комплексные числа z_1 и z_2 являются сопряжёнными:

1) $z_1 = x^2 + yi - 5 - \frac{7}{i}$ и $z_2 = -y - x^2i - 4i$;

2) $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xyi^5$ и $z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$?

420. Докажите, что:

1) $1 + i + i^2 + i^3 = 0$; 2) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{99} + i^{100} = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое мнимая единица? При каком условии комплексное число является действительным?
2. Сформулируйте правила сложения и вычитания комплексных чисел.
3. Может ли частное двух сопряжённых мнимых чисел оказаться действительным числом? При каком условии?
4. Представьте комплексное число $(1 + i)^3$ в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа.

23. Геометрическое представление комплексного числа

Сам термин «мнимые числа» отражает отношение к ним математиков XVI—XVIII вв. Это отношение изменилось лишь в XIX в. после работ Весселя, Аргана и Гаусса[1], которые нашли

---

[1] *Каспар Вéссель* (1745—1818) — датский математик. В его работе «Об аналитическом представлении направлений» (1799), посвящённой векторам, впервые дано геометрическое представление комплексных чисел. В течение столетия это сочинение оставалось неизвестным, и его результаты открывались вновь.

Жан Роберт Аргáн (1768—1822) — швейцарский математик, который дал геометрическую интерпретацию комплексных чисел на плоскости (1806), ввёл термин «модуль комплексного числа» (1814—1815).

Карл Фридрих Гáусс (1777—1855) родился в бедной крестьянской семье. Способности к математике у него проявились очень рано, по этому поводу он сам шутя говорил, что складывать научился раньше, чем говорить. Увлекаясь и филологией, и математикой, в 19 лет Гаусс выбрал математику, где им было уже сделано открытие — построение циркулем и линейкой правильного семнадцатиугольника. Спонсорство его учителя начальных классов, которого Карл поразил, почти мгновенно вычислив сумму натуральных чисел от 1 до 100, дало возможность Гауссу окончить Гёттингенский университет. В этом университете он всю жизнь и проработал профессором и директором обсерватории. Работы Гаусса оказали огромное влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории тяготения, теории электричества и магнетизма, геодезии и др. После смерти Гаусса издано 12 томов его сочинений, но до сих пор многие исследования не опубликованы.

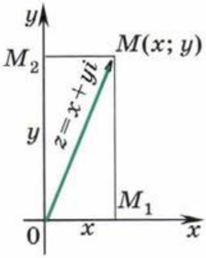


Рис. 120

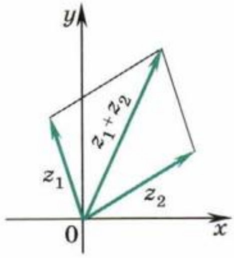


Рис. 121

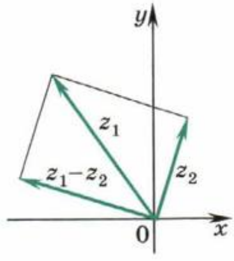


Рис. 122

комплексным числам и действиям с ними простое геометрическое истолкование.

Комплексное число $z = x + yi$ можно изобразить на координатной плоскости в виде вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 120). Координаты x и y вектора $\overrightarrow{OM}$ являются, соответственно, действительной частью и коэффициентом мнимой части комплексного числа z. При этом каждому комплексному числу соответствует некоторый вектор, а различным комплексным числам соответствуют различные векторы.

С другой стороны, координаты любого вектора можно рассматривать как действительную часть и коэффициент мнимой части некоторого комплексного числа.

При такой интерпретации *сумма* двух комплексных чисел изображается вектором, равным *сумме векторов* (рис. 121), а *разность* двух комплексных чисел — вектором, равным *разности* соответствующих векторов (рис. 122).

Длину вектора $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 120), равную $\sqrt{x^2 + y^2}$, называют ***модулем комплексного числа*** $\boldsymbol{z = x + yi}$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $3 < |z + 4 - 3i| \leqslant 4$, где $z = x + yi$.

Решение. Под знаком модуля стоит разность комплексных чисел: $z - (-4 + 3i)$.

Данное в условии неравенство показывает, что конец вектора z должен находиться от конца вектора $(-4 + 3i)$ более чем в трёх, но не дальше чем в четырёх единицах длины. Другими словами, конец вектора z должен быть одновременно внутри круга радиусом 4 с центром в точке $(-4; 3)$ и вне круга с тем же центром и радиусом 3, т. е. в кольце (рис. 123).

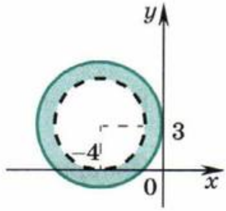


Рис. 123

Пример 2. Решить уравнение $|z| - iz = 1 - 2i$.

Решение. Запишем z как $x + yi$, тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - i(x + yi) = 1 - 2i,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + y - xi - 1 + 2i = 0.$$

Приравняв к нулю отдельно действительную часть и коэффициент при мнимой части комплексного числа

$\sqrt{x^2 + y^2} + y - xi - 1 + 2i$, получим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + y - 1 = 0, \\ -x + 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2^2 + y^2} = 1 - y, \\ x = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + y^2 = 1 + y^2 - 2y, \\ x = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $z = 2 - \dfrac{3}{2}i$.

Упражнения

421. Представьте комплексные числа, изображённые на рисунке 124, в виде $x + yi$ и найдите их модули.

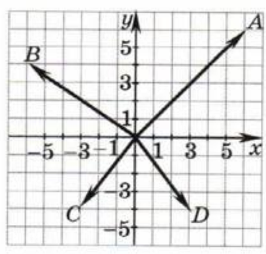


Рис. 124

422. Изобразите на координатной плоскости комплексное число:

1) 5;
2) $-2i$;
3) -1;
4) $10i$;
5) $2 + 2i$;
6) $2 - 2i$;
7) $-3 - 3i$;
8) $-3 + 3i$;

9) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

10) $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

11) $1-i\sqrt{3}$;

12) $-\sqrt{3}-i$.

423. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

1)○ $|z-1|=|z+1|$;

2)○ $|z+1-i|=|z-1+i|$;

3)○ $|z|^2+3z-3\bar{z}=0$;

4)○ $(1-i)\bar{z}=(1+i)z$;

5)● $|z+6|=2|z|$;

6)● $3|z-10|=|z+2|$.

424.● Докажите, что $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, где $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $c^2+d^2\neq 0$.

425. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

1)○ $|z-1|>|z+1|$;

2)○ $0<|z+1+2i|\leqslant 2$;

3)● $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|\leqslant 1$.

426.○ Решите систему уравнений $|z+1-i|=|3-z-i|=|z+i|$.

427.● Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z+1+i|\leqslant 1$, найдите число с наибольшим модулем.

428.● Найдите число с наименьшим модулем среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию:

1) $|z+1+i|\geqslant 3$; 2) $|z+1-i|\leqslant 1$; 3) $|z+1-i|\geqslant 1$.

429.● Докажите, что система уравнений $\begin{cases}|z+1-i|=\sqrt{2},\\|z|=3\end{cases}$ не имеет решений.

! Контрольные вопросы и задания

1. Как называются комплексные числа, которые изображаются векторами, симметричными относительно оси абсцисс?

2. Что можно сказать о комплексных числах, которые изображаются сонаправленными ненулевыми векторами?

3. Есть ли среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z-3+i|=5$, сопряжённые?

24. Тригонометрическая форма комплексного числа

Если начала всех векторов, имеющих модуль, равный r, поместить в точку $O(0;\ 0)$, то их концы образуют окружность радиусом r с центром в начале координат (рис. 125). Каждый из этих векторов, например $\overrightarrow{OM}$ (рис. 126), может быть получен в результате поворота вектора $\overrightarrow{OA}$ вокруг начала координат на угол φ, который называют ***аргументом комплексного числа*** z и обозначают $\arg z$ (заметим, что таких углов бесконечно много и они отличаются друг от друга на $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$). Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и, следовательно:

$$\boldsymbol{z = x + yi} = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = \boldsymbol{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}.$$

Выражение $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют ***тригонометрической формой комплексного числа.***

В тригонометрической форме с комплексными числами намного удобнее выполнять умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Пусть даны два комплексных числа:

$$u = 6(\cos 30° + i\sin 30°) \text{ и } v = 2(\cos 15° + i\sin 15°).$$

Найдём произведение этих чисел:

$$uv = (6(\cos 30° + i\sin 30°))(2(\cos 15° + i\sin 15°)) =$$

$$= 6 \cdot 2(\cos 30°\cos 15° + i\sin 30°\cos 15° +$$

$$+ i\cos 30°\sin 15° + i^2\sin 30°\sin 15°) =$$

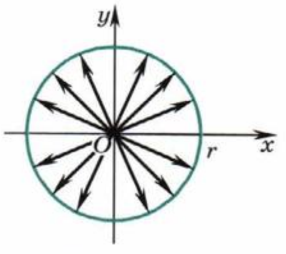


Рис. 125

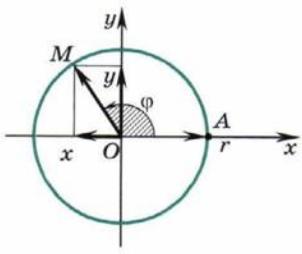


Рис. 126

$$= 6 \cdot 2((\cos 30° \cos 15° - \sin 30° \sin 15°) +$$

$$+ i(\sin 30° \cos 15° + \cos 30° \sin 15°)) =$$

$$= 6 \cdot 2(\cos (30° + 15°) + i\sin (30° + 15°)) =$$

$$= 6 \cdot 2(\cos 45° + i\sin 45°) = 6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}.$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$\boldsymbol{u \cdot v = r_1(\cos \varphi_1 + i\sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i\sin \varphi_2) =}$$
$$\boldsymbol{= r_1 \cdot r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin (\varphi_1 + \varphi_2)).}$$

Вспомним теперь, что разделить число u на число v — значит найти такое число z, что $zv = u$. Пусть модуль числа z равен r, а его аргумент равен φ. Тогда $r \cdot 2 = 6$ и $\varphi + 15° = 30°$. Отсюда $r = \frac{6}{2} = 3$ и $\varphi = 30° - 15° = 15°$, т. е.

$$z = 3(\cos 15° + i\sin 15°).$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

$$\boldsymbol{\frac{u}{v} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i\sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i\sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} = (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin (\varphi_1 - \varphi_2)).}$$

При умножении и делении комплексных чисел их аргументы ведут себя так же, как показатели степеней с одинаковыми основаниями: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$. Это сходство навело Л. Эйлера[1] на мысль записать комплексное число в виде степени в так называемой ***показательной*** *форме* $z = re^{i\varphi}$.

[1] *Леонард Э́йлер* (1707—1783) родился в Швейцарии в семье пастора. В 1720 г. поступил в университет, где уже в 17 лет был удостоен степени магистра искусств за речь, посвящённую сравнению философии Р. Декарта и И. Ньютона. В 19 лет опубликовал в журнале свою первую научную работу. С 1727 г. и до конца жизни работал в Петербургской академии наук. Л. Эйлер — великий учёный, сделавший открытия во всех известных в его время разделах математики и механики, теории упругости, математической физике, оптике, теории музыки, теории машин и др. Эйлер одним из

Тождество Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Это тождество и легко получаемые из него формулы

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

нашли широкое применение в математике. В знак уважения к их создателю первую букву его фамилии стали использовать для обозначения числа e.

Отдав должное памяти великого Леонарда Эйлера, вернёмся к действиям с комплексными числами в тригонометрической форме.

Возведение в степень с натуральным показателем n сводится к нахождению произведения, в котором n одинаковых множителей. Пусть $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, тогда

$$z^n = (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n =$$

$$= \underbrace{(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)) \cdot \ldots \cdot (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))}_{n \text{ множителей}} =$$

$$= r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Формула возведения комплексного числа в степень была выведена А. Муавром[2] в начале XVIII в. и носит его имя.

написал учебники по математическому анализу. Математический аппарат он разрабатывал для решения проблем естествознания, поэтому около 60% работ Эйлера относятся к математике, остальные — преимущественно к её приложениям. В последние 13 лет своей жизни, потеряв зрение, он диктовал свои работы ученикам. Опубликовано 70 томов собраний сочинений Эйлера, сроки завершения работы над архивами трудно предсказать. Каждая страна — участница этого международного проекта получает один экземпляр каждого тома, издание выходит малым тиражом и является раритетным.

В 1837 г. Петербургская академия наук воздвигла памятник на могиле Эйлера, в 1956 г. его прах был перенесён в Ленинградский некрополь.

[2] *Абрахам де Муáвр* (1667—1754) — английский математик, член Лондонского королевского общества, член Парижской и Берлинской академий наук. В 1707 г. Муавр вывел правило возведения в n-ю степень и извлечения корня n-й степени комплексных чисел.

При возведении комплексного числа в степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени:

$$\boldsymbol{z^n = (r(\cos \alpha + i\sin \alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).}$$

Умение возводить в степень комплексные числа помогает в тригонометрии при вычислении значений кратных углов.

Пример 1. Найти $\cos 5\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Попробуем выразить $\cos 5\alpha$ через тригонометрические функции угла α. В этом нам поможет формула Муавра. При $n = 5$ из неё получаем:

$$(\cos \alpha + i\sin \alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha.$$

Раскрываем скобки:

$$(\cos \alpha + i\sin \alpha)^5 = \cos^5 \alpha + 5\cos^4 \alpha \cdot i\sin \alpha + 10\cos^3 \alpha \cdot (i\sin \alpha)^2 +$$
$$+ 10\cos^2 \alpha \cdot (i\sin \alpha)^3 + 5\cos \alpha \cdot (i\sin \alpha)^4 + (i\sin \alpha)^5 =$$
$$= \cos^5 \alpha + 5i\cos^4 \alpha \sin \alpha - 10\cos^3 \alpha \sin^2 \alpha - 10i\cos^2 \alpha \sin^3 \alpha +$$
$$+ 5\cos \alpha \sin^4 \alpha + i\sin^5 \alpha = (\cos^5 \alpha - 10\cos^3 \alpha \sin^2 \alpha +$$
$$+ 5\cos \alpha \sin^4 \alpha) + i(5\cos^4 \alpha \sin \alpha - 10\cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + \sin^5 \alpha)$$

и приравниваем действительные части правой и левой частей равенства:

$$\boldsymbol{\cos 5\alpha = \cos^5 \alpha - 10\cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5\cos \alpha \sin^4 \alpha.}$$

Найдём $\cos \alpha$: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$ и подставим значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ в полученную формулу:

$$\cos 5\alpha = \left(-\frac{3}{5}\right)^5 - 10\left(-\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 5\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4 =$$

$$= \frac{-243 + 4320 - 3840}{5^5} = \frac{237}{3125}.$$

Ответ: $\frac{237}{3125}$.

Нам осталось разобрать, как извлекать корень из комплексного числа.

Пример 2. Найти кубический корень из числа
$u = 27(\cos 135° + i\sin 135°)$.

Решение. Пусть модуль комплексного числа $z = \sqrt[3]{u}$ равен r, а его аргумент φ, тогда, поскольку $\left(\sqrt[3]{u}\right)^3 = u$, получим: $r^3 = 27$, а $3\varphi = 135°$. Отсюда $r = \sqrt[3]{27} = 3$ и $\varphi = \frac{135°}{3} = 45°$, т. е. $z = 3(\cos 45° + i\sin 45°)$.

При извлечении корня из комплексного числа извлекается корень из его модуля, а аргумент делится на показатель степени корня:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Казалось бы, всё просто. Вспомним, однако, что у комплексного числа имеется бесконечно много аргументов, отличающихся на $360° \cdot k$, поэтому корень из комплексного числа оказывается не единственным. Так, в рассмотренном примере можно в качестве аргумента числа u взять угол $135° + 360°$ и получить $\varphi_2 = \frac{135° + 360°}{3} = 165°$.

Если же взять $135° + 2 \cdot 360°$, то

$$\varphi_3 = \frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 45° + 2 \cdot 120° = 285°.$$

Заметим, что аргумент кубического корня из числа u каждый раз увеличивается на $120°$, а модуль не изменяется. Геометрически это означает, что соответствующий вектор *поворачивается* на $120°$ вокруг начала координат.

Может показаться, что, продолжая прибавлять к аргументу u по $360°$, будем получать всё новые и новые кубические корни. Проверим это предположение:

$$\varphi_4 = \frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 45° + 3 \cdot 120°.$$

Действительно найден новый угол, однако, поскольку

$$\cos(45° + 360°) = \cos 45° \text{ и } \sin(45° + 360°) = \sin 45°,$$

то получился уже найденный корень

$$z_1 = 3(\cos 45° + i\sin 45°).$$

Векторы $z_1 = 3(\cos 45° + i\sin 45°)$,

$z_2 = 3(\cos 165° + i\sin 165°)$ и $z_3 = 3(\cos 285° + i\sin 285°)$

получаются один из другого поворотом на 120° по (или против) часовой стрелке вокруг начала координат. Поскольку именно к такому повороту и приводит увеличение (уменьшение) аргумента числа u на угол 360°, понятно, что новых значений кубического корня мы не получим.

Вы встретились с удивительной ситуацией, когда выражение $\sqrt[3]{u}$ имеет три разных значения, а не одно, как обычно бывает при вычислениях с действительными числами.

Аналогично можно показать, что существует четыре различных корня четвёртой степени из комплексного числа, причём концы соответствующих им векторов расположены в вершинах квадрата.

> Существует n различных корней n-й степени из комплексного числа, отличного от нуля.

Теперь становится понятным, как по формуле Кардано найти все три корня рассмотренного в пункте 1 кубического уравнения $x^3 - 6x - 4 = 0$:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} =$$

$$= \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{8}(\cos 45° + i\sin 45°)} +$$

$$+ \sqrt[3]{\sqrt{8}(\cos(-45°) + i\sin(-45°))} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt[3]{\cos 45° + i\sin 45°} + \sqrt[3]{\cos(-45°) + i\sin(-45°)}.$$

Каждый из двух кубических корней, в сумме дающих корень кубического уравнения, имеет три значения. Чтобы получить действительные корни уравнения, из них следует выбрать пары сопряжённых комплексных чисел:

$$x_1 = \sqrt{2}(\cos 15° + i\sin 15° + \cos(-15°) + i\sin(-15°)) =$$

$$= 2\sqrt{2}\cos 15°;$$

$$x_2 = \sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135° + \cos(-135°) + i\sin(-135°)) =$$

$$= 2\sqrt{2}\cos 135°;$$

$$x_3 = \sqrt{2}\,(\cos 255° + i\sin 255° + \cos(-255°) + i\sin(-255°)) =$$
$$= 2\sqrt{2}\cos 255°.$$

Преобразовав полученные выражения, получим уже знакомые нам из примера 1 пункта 17 числа:

$$2\sqrt{2}\cos 15° = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 15° = 4\cos 45° \cos 15° =$$
$$= 2(\cos 60° + \cos 30°) = 1 + \sqrt{3},$$
$$2\sqrt{2}\cos 135° = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2,$$
$$2\sqrt{2}\cos 255° = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin 15°) = -4\sin 45° \sin 15° =$$
$$= -2(\cos 30° - \cos 60°) = 1 - \sqrt{3}.$$

Упражнения

430. Представьте комплексные числа, указанные в № 422 предыдущего пункта, в тригонометрической форме.

431. Представьте комплексные числа, изображённые на рисунке 124 в № 421 в тригонометрической форме.

432.○ Найдите аргумент числа:
1) $1 + 2i$; 2) $-3 - 5i$; 3) $3 + 2i$; г) $4 - 3i$.

433. Запишите в виде $x + yi$ число:
1) $2(\cos 30° + i\sin 30°)$;
2) $\sqrt{2}\,(\cos(-45°) + i\sin(-45°))$;
3) $\sqrt{3}\,(\cos 120° + i\sin 120°)$;
4)● $3\left(\cos \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + i\sin \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$.

434. Найдите произведение комплексных чисел u и v, если:
1) $u = 3(\cos 16° + i\sin 16°)$, $v = 2(\cos 74° + i\sin 74°)$;
2) $u = 5(\cos 25° + i\sin 25°)$, $v = 0{,}2(\cos 5° + i\sin 5°)$.

435. Найдите: 1) $(1 + i)^{10}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{16}$.

436. Найдите:

1) $\sin 5\alpha$; 2) $\cos 4\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 3\alpha$,

если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

437. Найдите частное $\frac{u}{v}$, если:

1) $u = 6(\cos 16^\circ + i\sin 16^\circ)$, $v = 3(\cos(61^\circ) + i\sin(61^\circ))$;
2) $u = 5(\cos(-14^\circ) + i\sin(-14^\circ))$,
$v = 0{,}2(\cos 44^\circ + i\sin 44^\circ)$.

438. Докажите, что:

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; 2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

439. Какой наименьший модуль может иметь выражение

$$z + \frac{1}{z}?$$

440. Найдите все значения z, удовлетворяющие уравнению

$$z^2 + |z| = 0.$$

441. Найдите все комплексные значения выражения:

1) $\sqrt{1+i}$; 3) $\sqrt[4]{-1-i}$; 5) $\sqrt[6]{-1}$.
2) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$; 4) $\sqrt[5]{1}$;

442. Найдите все комплексные числа z такие, что:

1) $(\bar{z})^3 = 2 - 2i\sqrt{3}$; 2) $(\bar{z})^6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

443. Решите по формуле Кардано уравнение:

1) $x^3 - 2x + 4 = 0$; 2) $x^3 - x^2 - 2x - 12 = 0$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Какие арифметические действия удобно выполнять с комплексными числами в тригонометрической форме? Что такое показательная форма комплексного числа?
2. Запишите формулу Муавра для комплексного числа с модулем, равным 1.
3. Представьте в виде $a + bi$ корни шестой степени из 1.

Заключение

Вскоре после открытия формулы корней кубического уравнения ученик Кардано Людовико Феррари нашёл способ решения произвольных уравнений четвёртой степени. Однако для уравнения пятой степени отыскать такой способ никому не удавалось. Точку в этих поисках поставил Нильс Абель, доказав невозможность существования общих формул корней для уравнений пятой и более высоких степеней.

Нильс А́бель (1802—1829) — норвежский математик. Работа об уравнениях пятой степени — лишь одно из его великих достижений. Этими уравнениями он занимался ещё в школе, и ему показалось, что он вывел формулу для их решения. Никто в Норвегии не мог проверить доказательство, в котором Нильс сам затем нашёл ошибку. В 16 лет Абель по совету своего учителя начал читать труды Ньютона, Эйлера и Лагранжа, а через несколько лет открытия стал совершать он сам. Родившись в многодетной семье пастора, он всю свою короткую жизнь прожил в бедности и умер от туберкулёза в возрасте 27 лет. В математике Нильс Абель оставил видный след, его именем названы интегралы, группы. В королевском парке в столице Норвегии городе Осло стоит скульптура сказочного юноши, попирающего двух поверженных чудовищ, которые символизируют уравнения пятой степени. По цоколю идёт надпись «ABEL».

За время обучения в школе ваши представления о числах прошли большой путь: от натуральных чисел к рациональным, затем к действительным и, наконец, к комплексным. У человечества этот путь растянулся почти на всю его историю.

Каждый раз при расширении понятия числа приобретались новые более широкие возможности, но были и некоторые потери. Так, например, работая с натуральными числами, мы могли для каждого числа указать следующее, а перейдя к рациональным, обнаружили, что следующего числа нет, так как между любыми двумя рациональными числами есть третье. На множестве комплексных чисел потеряна возможность сравнивать числа, так как нельзя установить, какое из комплексных чисел больше, или, как говорят математики, — нельзя *упорядочить* множество комплексных чисел.

Однако для комплексных чисел сохранились переместительный, сочетательный и распределительный законы арифметических действий, с которыми вы познакомились ещё в начальной школе, свойства нуля при сложении и единицы при умножении.

Оказалось, что дальнейшее расширение понятия числа без отказа от некоторых из этих законов невозможно. Этот факт установил в XIX в. Карл Гаусс.

На этом ваш курс алгебры и начал анализа завершён.

Авторы желают вам успешно сдать ЕГЭ и вновь встретиться с математикой в аудиториях выбранных вами вузов.

Домашние контрольные работы

Контрольная работа № 1 (90 мин)

I уровень

1. На рисунке 127 изображены графики некоторых функций.

1) Какие из этих функций являются непрерывными?

2) Укажите точки разрыва разрывных функций.

3) Запишите для каждой функции её промежутки возрастания и убывания.

2. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

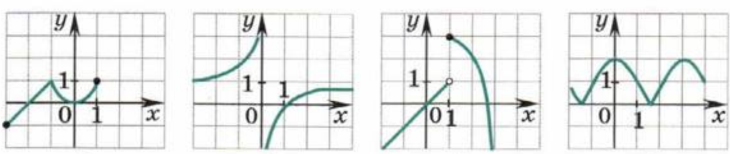
3. Какие из графиков следующих функций имеют:
а) вертикальные; б) горизонтальные асимптоты?
Запишите уравнения этих асимптот.

1) $y = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$; 3) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

2) $y = \operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x$.

4. Найдите уравнение наклонной асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ и изобразите сам график.

5. Решите уравнение $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 127

II уровень

6. Докажите непрерывность функции $y = 2x - 1$ в точке $x_0 = 3$.

7. Задайте аналитически функции, графики которых изображены на рисунке 127.

8. Найдите область значений функции $y = \dfrac{x+1}{x}$.

9. Решите неравенство $(\ln^2 x - 1)(4x^2 - 5x + 1) > 0$.

III уровень

10. 1) Найдите уравнение наклонной асимптоты графика функции $y = \dfrac{6x^3 - 5x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$.

2) Определите, есть ли у этого графика вертикальные асимптоты, и изобразите сам график.

11. Решите тригонометрическое уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0{,}5.$$

Контрольная работа № 2 (90 мин)

I уровень

1. На рисунке 128 изображён график функции $y = f(x)$.

1) В каких точках графика касательная к нему: а) не существует; б) параллельна оси абсцисс; в) наклонена к положительному направлению оси абсцисс под острым углом; г) имеет отрицательный угловой коэффициент?

2) Укажите: а) критические точки; б) точки максимума; в) точки минимума функции.

3) В каких точках функция принимает: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение? Чему они равны?

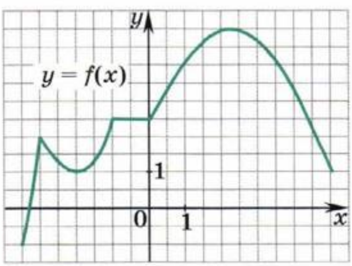


Рис. 128

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = -3$.

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x + 2\cos^2 2x = \frac{7}{4}.$$

II уровень

4. Решите неравенство $(2x+3)\sqrt{4x-3x^2-1} \leqslant 0$.

5. Дана функция $y = x^3 - 3x$.

1) Найдите по определению производную функции.

2) Напишите уравнение касательной к графику функции:

а) параллельной; б) перпендикулярной прямой $y = 2x$.

3) Определите промежутки монотонности и точки экстремума функции.

III уровень

4) Найдите с помощью производной приближённое значение функции при $x = 0{,}98$.

5) Используя калькулятор, найдите абсолютную и относительную погрешности полученного приближения.

6) Постройте график данной функции.

6. Докажите, что функция $y = \sqrt{x^2-9}\cdot(x^5 - \sin x)$ нечётная.

7. В равнобедренный треугольник, основание которого на 7 м больше высоты, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на боковых сторонах треугольника, а две другие — на его основании. Выразите площадь треугольника S как функцию длины x стороны квадрата. Найдите площадь треугольника, если известно, что сторона вписанного квадрата равна 12 см.

Контрольная работа № 3 (120 мин)

I уровень

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{x^2-1}$ в точке $x_0 = 3$.

2. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t + \sin^2 t$ (м), где t с — время движения.

1) Какую скорость будет иметь тело в момент времени $t = \frac{3\pi}{4}$?

2) Найдите силу, которая действует на тело.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x^2}{x+2}$ на отрезке $[1; 5]$.

4. Исследуйте с помощью производной функцию $y = x^3 + 3x^2 + 2$ и постройте её график.

5. Решите неравенство $\log_2(x-1) + \log_2 x < 1$.

II уровень

6. Найдите два положительных числа, сумма которых равна трём, если известно, что произведение первого числа на квадратный корень из второго максимально.

7. Решите уравнение $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$.

III уровень

8. Дана функция $y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$

1) Найдите производную этой функции.

2) Существует ли предел: а) $\lim\limits_{x \to 0} y$; б) $\lim\limits_{x \to 0} y'$?

9. Найдите уравнение касательной к кривой, заданной уравнением $y^2x - yx^2 + 6 = 0$, в точке $K(3; 2)$.

10. Используя первую и вторую производную, исследуйте функцию $y = \dfrac{x^2}{1-x}$ и постройте её график.

Контрольная работа № 4
(120 мин)

I уровень

1. Запишите в виде интеграла площади фигур, ограниченных графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (рис. 129).

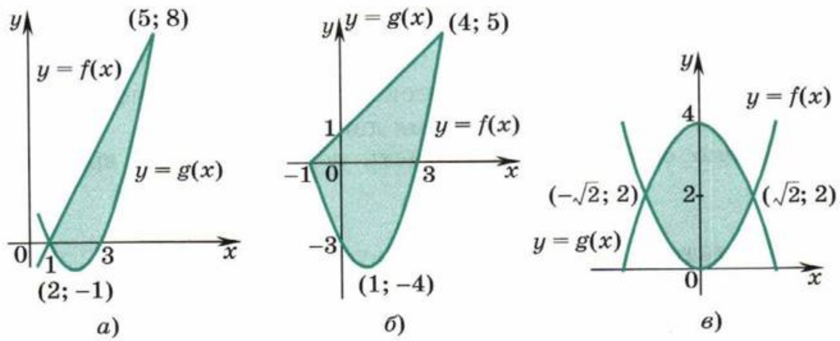


Рис. 129

2. Какая из функций:
1) $F(x) = \cos 2x - \ln x + 2$;
2) $F(x) = \sin 2x - x \ln x + 5$;
3) $F(x) = \sin 2x - x - \ln x$

является первообразной для функции

$$f(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{x} - 1?$$

3. Найдите первообразную функции $y = \frac{1}{(2x-1)^2}$, график которой проходит через точку $A(1; 0)$.

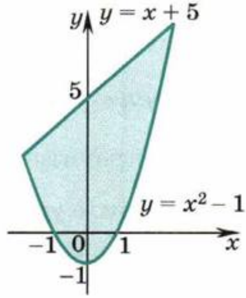


Рис. 130

4. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 130.

5. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant 0$.

II уровень

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{2}{x},\ y = 2,\ x = 2.$$

7. Тело стартует из точки, принятой за начало отсчёта, и движется прямолинейно со скоростью, которая изменяется по закону $v(t) = t + \sqrt[3]{2t+1}$ (м/с).

1) Найдите путь, пройденный телом за первые 13 с движения.

2) Чему равно стартовое ускорение тела?

8. Решите уравнение $\log_2 x - \log_{0,5}(x-2) = 3$.

III уровень

9. Зная, что кривые на рисунке 129 — параболы, задайте их аналитически и вычислите площади заштрихованных фигур.

10. Найдите объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x$, вокруг оси абсцисс.

11. Вычислите, используя геометрическую интерпретацию, $\int\limits_0^6 \left(\left| x - 1 \right| + \left| 3 - \frac{x}{6} \right| \right) dx$.

Контрольная работа № 5
(120 мин)

I уровень

1. Сократите дробь $\dfrac{a^2 - 13a + 30}{-2a^2 + 5a + 3}$.

2. Решите уравнение:

1) $\log_2^2 x + 2\log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$;

2) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$

3) $\sqrt{3x^2 + 2x - 12} = 2$;

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 4x = a$ имеет единственный положительный корень?

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x + y = 8. \end{cases}$

II уровень

5. Решите уравнение:

1) $x^3 - 5x^2 - 3x + 15 = 0$;

2) $3x^3 + 10x^2 - 27x - 10 = 0$.

6. Решите неравенство $\sin x - \sin 3x < 0$.

7. При всех значениях параметра b решите уравнение

$$\log_2(4^x - b) = x.$$

8. При каких значениях a функция $y = x^3 + 2x^2 + ax - 5$ не имеет критических точек?

III уровень

9.● С помощью введения новой переменной решите уравнение $(x^4 + x^2)^2 - x^4 - x^2 = 2$.

10. При каком значении параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Контрольная работа № 6
(40 мин)

I уровень

1. На 10 карточках записаны числа от 1 до 10. Наугад выбирается одна из этих карточек. Событие A заключается в том, что на выбранной карточке чётное число, событие B — простое число, событие C — число, большее 6.

1) В чём заключается событие:
а) AB; б) BC; в) AC; г) $B+C$; д) $\overline{C}$; е) $\overline{A}B$; ж) $\overline{A}+\overline{C}$?
2) Найдите вероятность события:
а) A; б) B; в) C; г) AB; д) $\overline{B}+C$; е) $AB\overline{C}$.

II уровень

2. Какова вероятность того, что в серии подбрасываний монеты орёл впервые выпадет на четвёртом броске?

III уровень

3. Монета подбрасывается до первого выпадения орла. Номер броска, при котором выпал орёл, записывается.

1) Каково математическое ожидание номера броска?

2) Проведите описанный эксперимент 20 раз и найдите моду, медиану и размах получившегося ряда чисел.

Контрольная работа № 7 (90 мин)

I уровень

1. Решите уравнение $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2. Выполните действия $\dfrac{(1-i)(3+i)}{2+i} - \dfrac{4-i}{2-i}$.

3. Изобразите на плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих условию:
1) $|z+3| = 1$; 2) $|z-2+i| = |z-i+2|$, где $z = x+yi$.

II уровень

4. Найдите все значения выражения $\sqrt[3]{1-i}$.

5. Решите уравнение $z^2 - (2+3i)z + 4i - 2 = 0$.

III уровень

6. Решите уравнение $|z| - 2z = 2i - 1$.

7. Найдите все комплексные числа z такие, что

$$z^{-4} + \frac{1}{2} = \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

ОТВЕТЫ

Глава 1

Непрерывность и пределы функций

П. 1

1. Разрывы имеют функции — 2, 3, 4, 5, 9. Точки разрыва: 2) $x = 0$; 3) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$; 9) $x = 2$. **2.** 1) $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$; 3) 4,42. **3.** 1) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$; 3) $\left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; 4)$. **7.** 1) а) *а, б, в, г, ж, з*; б) *а, б*. **10.** 5) $(\pi - 0{,}00001; \pi + 0{,}00001)$. **11.** 5) $|x + 0{,}5| < 1{,}5$.

П. 2

23. 1) -2; 2) 0; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 0; 5) $-\frac{3}{2}$. **24.** 1) *а, д, е*. **25.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) -4; 3) -4; 4) -2; 5) 1; 6) 0. **26.** Имеют 1, 3. **28.** 1, 3, 5, 6. **30.** 1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$; 2) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$. **31.** 1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $0 \leqslant x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; 3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $0 \leqslant x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. **32.** 1) $\exists a\ \forall x \in D(f)$, $f(x) > a$; 2) а) нет; б) нет; 3) $\forall a\ \exists x \in D(f)$, $f(x) > a$.

П. 3

35. 2) а) $x = 3$; б) $x = 0$; в) $x = 1$; г) $x = -3$. **40.** 1) в) 1,5; г) 1 при $x \to +\infty$ и -1 при $x \to -\infty$. **41.** 1) $y = 3x + 2$; 2) $y = 2x + 8$; 3) $y = 4x - 1$; 4) $y = x$. **43.** 1) а, б, в, г, д, е; 2) б, в, г, е; 3) а, д. а) $x = -1$, $y = x - 1$; г) $x = 3$, $y = 2$; д) $x = 1$, $y = x$; е) $x = \pm\sqrt[4]{3}$, $y = -1$. **44.** 1) Да; 2) а) да, б) нет; в) нет. **45.** 1) Вертикальную асимптоту $x = a$; 2) горизонтальную асимптоту $y = a$; 3) наклонную асимптоту

$y = kx + b$. **46.** 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$; 3) $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = \infty$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} (g(x) - 3x + 1) = 0$. **48.** 1) $y = \left|x + \frac{1}{x}\right|$; 2) $y = \frac{|x| + 1}{x}$. **49.** 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Глава 2

Производная функции

П. 4

55. 2) а) 1; б) 0; в) –1; 3) –2. **56.** 1) $k = -2$; 2) $k = 0$. **58.** 1) $y = -5x + 1$; 2) $y = -x + 3$. **59.** 1) (6; –29); 2) (–3; –12). **60.** $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{553}$. **61.** 1) $y = 2\frac{7}{8}$; 2) $y = x + 2{,}5$; 3) $y = -2x + 2\frac{7}{8}$. **62.** 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -6x - 15$. **63.** Прямая $y = -\frac{1}{4}$.

П. 5

68. Необязательно, кривая может, например, касаться то кривой $y = \frac{1}{x}$, то оси абсцисс и при этом иметь как угодно далеко от начала координат касательные с угловыми коэффициентами 1 и –1. **70.** Это следует из симметрии соответствующих касательных относительно: 1) оси ординат ($\mathrm{tg}\,\alpha_1 = -\mathrm{tg}\,\alpha_2$); 2) начала координат ($\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_2$). **72.** 1) $y' = 2x$; 2) $y' = 3x^2$; 3) $y' = -\frac{1}{x^2}$; 4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 5) $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$; 6) $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. **76.** 1) $y = 2$; 2) $y = 1$ и $y = \frac{-9x + 17}{8}$; 3) $y = -x - 2$; 4) $y = 0{,}25x + 1$. **77.** 1) б) $y = -4x + 6$; 2) а) $y = 12x - 18$ и $y = 12x + 9$; б) $y = 2$. **78.** 1) $y = 2$; 2) $y = -x + 3{,}75$; 3) $y = x - 0{,}25$; 4) $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{15}{16}$. **82.** 1) 1 с; 2) 2 с; 3) 1 м; 4) 3 с. **86.** $8{,}88\pi \approx 27{,}9$ (см²). **87.** 36 Дж.

П. 6

97. 1) Убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$; 2) возрастает на $(-\infty; +\infty)$; 3) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; 4) возрастает на $[0; +\infty)$; 5) убывает на $(0; +\infty)$; 6) убывает на $(-\infty; 1)$ и на $(1; +\infty)$. **99.** См. рисунок 131. **100.** 1) Любая монотонная функция, например $y = \sqrt{x}$. **101.** 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) нет. **102.** 1) а) Нет; б) да; 2) может, достаточно, чтобы

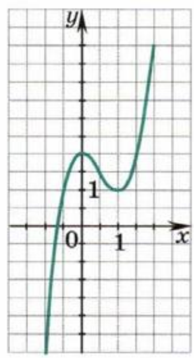


Рис. 131

функция имела конечное число положительных точек экстремума и не имела экстремума в нуле, как, например, функция $y = |x| + \frac{1}{|x|}$.

Глава 3

Техника дифференцирования

П. 7

103. 4) $5x^4 - 16x^3 + 18x^2$; 6) $10x^4 - 44x^3 + 72x^2 - 32x - 8$. **104.** 5) $\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}$; 7) $2{,}7x^{1{,}7}$; 9) $-\frac{3}{7}x^{-\frac{10}{7}}$. **105.** 2) $y' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; 4) $y' = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$; 6) $y' = -\frac{5}{x^6}$; 8) $y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$. **106.** 2) $y' = \frac{(3x+1)}{\sqrt{2x}} + 3\sqrt{2x}$; 4) $y' = \frac{44x^3 \cdot \sqrt[5]{2x^2} - 8x^7}{15}$. **107.** 2) $y' = x^2$; 5) $y' = 2x^2 - 3x$; 6) $y' = x^{0,5}$; 8) $y' = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. **108.** 3) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$; 4) $-\frac{\sqrt[5]{16}}{5}$. **109.** 1) $y = \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{4}$; 3) $y = -11$, $y = 5$; 4) $y = 4x - 2$; $y = 4x + 2\frac{17}{27}$. **110.** (0,25; 0,5). **112.** 1) Один; 2) два; 3) три. **113.** 1) $|a > \frac{4}{9}$; 2) $|a| = \frac{4}{9}$; 3) $|a| < \frac{4}{9}$. **114.** 1) По теореме Лагранжа при $f(a) = f(b) = 0$ имеем: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, где $c \in (a; b)$. **115.** 1) $v = v_0 - gt$; -12 м/с. **116.** $I(t) = 6t + 2$; 20 А. **117.** 1) $y' = 5x^4 - 16x^3 + 9x^2$; 2) $y' = \frac{7}{6}\sqrt[6]{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$; 3) $-6x^{-4}$; 4) $y' = 18x - 54$. **118.** $k = -3$. **119.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да. **125.** 1) $y = 0{,}2x$; 2) $y = -5x$. **126.** $A(-2; -4)$. **127.** См. рисунок 132. **128.** $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{24}$ или примерно 23°. **129.** (0; −1) и (4; 3). **130.** $y = u'vw + uv'w + uvw'$.

П. 8

135. 5) $y = \frac{1}{(5x-1)^2}$; 6) $y = \frac{1}{(\lg x + 6)^{10}}$. **137.** 1) $s(x) = x - 2$, $v(s) = |s|$, $u(v) = v - 3$, $f(u) = |u|$; 3) а) 6, −2, 4, 0; б) $a = 3$. **139.** 4) $9\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^8 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}\right)$. **140.** Третья, $y'(1) = \frac{5}{6}$, $y'(1) = -\frac{1}{4}$, $y'(1) = 120$. **141.** 1) а) $a = -2$; $a = 4$; 2) г) ни при каких значениях a; в) $a = -14$. **142.** 1) Во второй точке. **143.** 1) $y_{\max} = 18^5$, $y_{\min} = -9^5$; 2) $y_{\max} = -2{,}5$;

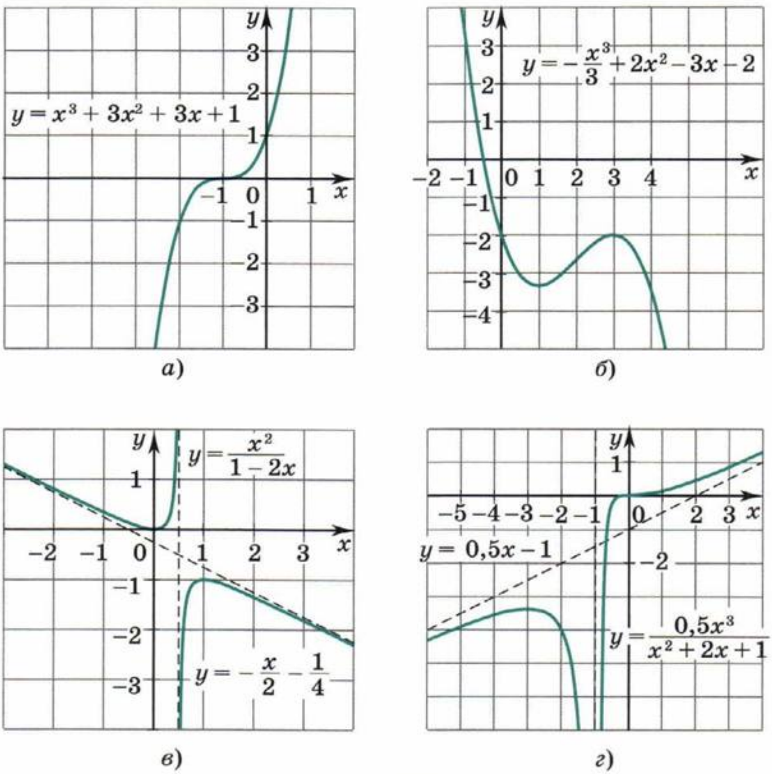


Рис. 132

$y_{\min} = 1{,}5$. **144.** $k = 8 \pm 2\sqrt{14}$. **145.** 1) 0; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{2}{13}$; 4) $-\frac{37}{144}\sqrt{3}$. **146.** 2) $y = 168x + 49$; 5) $y = \frac{4}{3}x - 3$; 6) $y = -\frac{11}{4}x + \frac{13}{2}$. **147.** $x = 4$. **148.** См. рисунок 133.

П. 9

149. 1) а) 1; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $-\sqrt{2}$; 2) а) 1; б) $\frac{3}{4}$; в) 2; г) 3; д) 0,25. 3) а) e^2; б) e; в) e^m. **150.** 1) $e^{f(x)} \cdot f'(x)$; 2) $f'(e^t) \cdot e^t$; 3) $\frac{f'(x)}{f(x)}$; 4) $f'(x) \cdot \cos f(x)$. **152.** $-\frac{m_0 \ln 2}{31} 2^{-\frac{t}{31}}$, «минус» перед выражением показывает, что масса уменьшается, время t измеряется в годах. **153.** $-\frac{1}{4}\ln 2$. **154.** 1) Функция возрастает на $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$; функция убы-

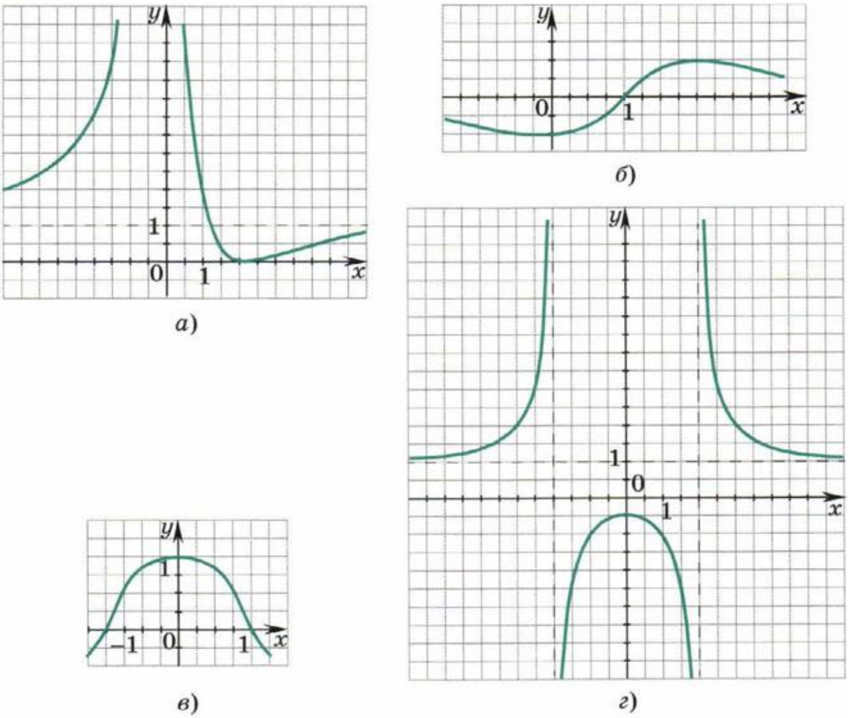


Рис. 133

вает на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; $x = \frac{1}{3}$ — точка максимума; 2) функция возрастает на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, убывает на $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 0]$, $x = 0$ — точка минимума, $x = \frac{2}{\ln 2}$ — точка максимума; 3) функция возрастает на $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$, убывает $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$, $x = -1$ и $x = 1$ — точки минимума; 4) функция возрастает на $(2; 3]$, убывает на $[3; +\infty)$, $x = 3$ — точка максимума. **155.** 1) $\log_9 10 > \log_{10} 11$; 2) 4. **156.** 3) $\cos 2x$; 5) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; 6) $-\frac{6}{9 + x^2}$; 7) $-\frac{2x}{|x| \cdot (x^2 + 1)}$; 8) $\frac{2\ln x - 2}{x^2 + \ln^2 x}$. **157.** 1) $x = -\frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **159.** 4) $y = -\frac{2}{3}x + 1 + \frac{\pi}{6}$. **160.** См. рисунок 134. **162.** При $a \geqslant 1$. **163.** $\frac{\pi}{4}$. **166.** Имеет максимум: 1, 2, 3, 4; имеет

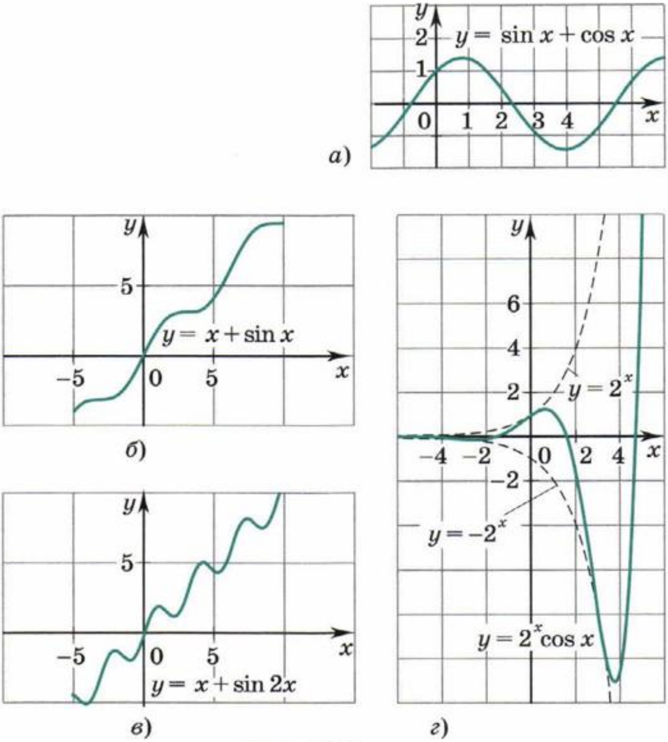


Рис. 134

минимум: 1, 2, 4. **167.** 1) $f(x) = 3x$ и $g(x) = \frac{x}{3}$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x^2$; 3) $f(x) = e^{2x}$ и $g(x) = \frac{1}{2}\ln x$; 4) $f(x) = \log_a x$ и $g(x) = a^x$. **168.** 2) $(0; 1)$ и $(1; e]$ — промежутки убывания, $[e; +\infty)$ — промежуток возрастания; 4) убывает на $(-\infty; 0]$ и $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$; возрастает на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$; 6) $(-\infty; -0{,}5)$ — интервал возрастания, $(2; +\infty)$ — интервал убывания. **169.** 3) $y = -\frac{1}{2}x + 2$. **170.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **171.** $x = k\pi$, $k \in Z$. **172.** $y = 1$. **173.** При $x > 1$: $y' = 0$. **175.** При $x \in (0; p]$ функция возрастает, при $x \in [p; +\infty)$ — убывает (рис. 135). **176.** 2) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$.

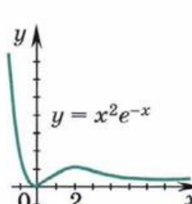


Рис. 135

178. 1) $y=\frac{x}{2}+\sqrt{2}$; $y=\frac{x}{2}-\sqrt{2}$; 2) $y=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}$; $y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$. **179.** $(-3;\ 11)$. **182.** 2) $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-\infty;\ -1)$. **183.** 1) $0<x<e^2$; 4) $-2<x<0$. **184.** 1) $\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\right.$ $\left.+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\left[-\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **185.** 1) а) $y'=2x\sin\frac{5}{x}-5\cos\frac{5}{x}+1$; б) 1.

П. 10

187. 2) 80 и 0; 3) -4 и -13; 4) $e-2$ и $2(1-\ln 2)$; 5) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и -2; 7) 1 и $\sqrt{5}$; 8) 0 и -3. **188.** $\left[-\frac{\sqrt{29}+5}{2};\ \frac{\sqrt{29}-5}{2}\right]$. **189.** Нет. **190.** 1) 2; 2) $y_{\text{наиб}}=5$, $y_{\text{наим}}=2{,}75$. **192.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) 0,5. **193.** 2) 1 и 4; 3) 98 и 49; 4) 1 и $e-1$. **194.** $\left(\frac{2}{3};\ \frac{16}{9}\right)$. **195.** $y=-1{,}5x+6$. **196.** Квадрат. **197.** 8 см. **200.** 2 дм^2. **201.** 12 см, $3\sqrt{3}$ см. **202.** Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. **203.** 8 см^2. **204.** 10 см^2. **205.** $\frac{H}{2}$, $\frac{R}{2}$. **206.** $\frac{R\sqrt{6}}{3}$. **207.** 1) $\min y=0$, $\max y=21+3\ln 2$; 2) $\min y=y(-3)=-3$, $\max y=y\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$. **208.** $a>b$. **209.** 1) $\frac{11\sqrt{2}}{8}$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 3) $\sqrt{2}$. **210.** 2,4. **211.** 1) 1 с; 2) 7 м/с. **212.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **213.** $R=r$. **214.** $0{,}25a$, $0{,}5a$. **215.** Высота равна радиусу основания. **216.** Радиус донышка банки $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ м. **217.** $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. **218.** $\frac{b}{\cos\alpha}+\frac{a}{\sin\alpha}$, где $\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. **219.** $\sqrt{41}$ м $\approx 6{,}4$ м. **220.** $\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$. **221.** Через $\frac{a}{2v}$ ч наименьшее расстояние будет равно $\frac{a}{2}$ км.

П. 11

222. 1) $f''(x)=2\ln x+3-4\cos 2x$; $f''(1)=3-4\cos 2$, $f''(\pi)=2\ln\pi-1$; 2) $f''(x)=\frac{-2}{x^2}-\frac{1}{9}\sin\frac{x}{3}$; $f''(3)=-\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\sin 1$; $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-8}{\pi^2}-\frac{1}{18}$. **223.** 3) Выпукла на $[1;+\infty)$, вогнута на $(-\infty;\ 1]$, точка перегиба (1; 2); 4) выпукла на $(-\infty;\ 0]$, вогнута на $[0;\ +\infty)$, точка перегиба (0; 0); 5) выпукла на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, вогнута на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, абсциссы точек перегиба $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. **224.** 1) Выпукла; 2) вогнута. **225.** 3) См. рисунок 136 и 4) рисунок 137. **226.** 1) Функция $y = x^{100}$ является вогнутой, $\frac{3^{100} + 2^{100}}{2} > \left(\frac{5}{2}\right)^{100}$; 2) $\frac{\sqrt[2014]{0,3} + \sqrt[2014]{0,7}}{2} < \sqrt[2014]{0,5}$.

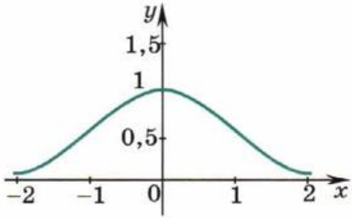


Рис. 136

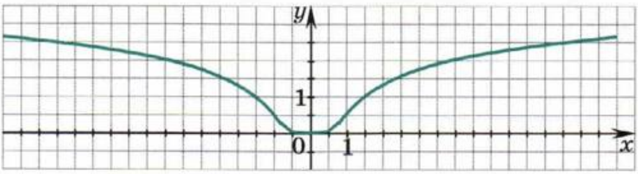


Рис. 137

228. 1) $y_{\text{наим}}(1) = -15$; $y_{\text{наиб}}(-1) = 5$; 2) $y_{\text{наим}}(1) = 1,5$; $y_{\text{наиб}}(0) = 2$; 3) $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ и 1; 4) наименьшее: $-\frac{3}{\sqrt{5}}$, наибольшее: $-\frac{3}{\sqrt{14}}$. **229.** 1) $-\frac{14}{e}$; 2) $-\frac{2}{e}$. **231.** 1) 21 м/с и 24 м/с^2. **232.** 1 и 4. **234.** $a_1 = 14$ м/с^2, $a_2 = 18$ м/с^2. **237.** 2) $v = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$, $a = \frac{\pi^2}{18}$. **238.** 1) $-2\sqrt{2}\,m$; 2) $4m$. **243.** См. рисунок 138.

Глава 4

Интеграл и первообразная

П. 12

244. Только фигуры на рисунке 88: *а*) и *в*). **245.** 1) а, б; площадь не изменится; 2) а, б; площадь увеличится в k раз. **246.** $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$. **247.** Площадь фигур на рисунке 90: *а*) $\int\limits_{-3}^{0} (4 - (x+1)^2)\,dx$; *г*) $\int\limits_1^4 (5x - x^2 - 4)\,dx$. **249.** Площадь фигур на рисунке 91:

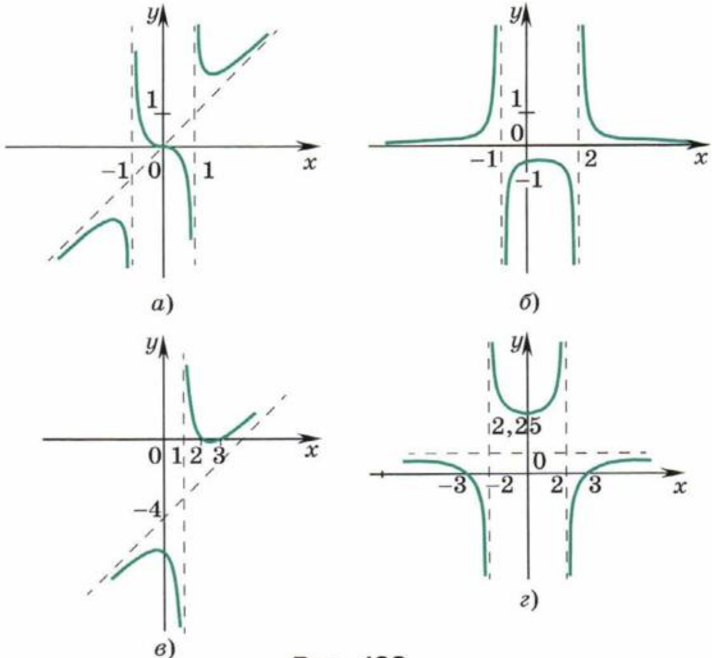


Рис. 138

а) $\int\limits_0^2 (2^x - 2x + x^2)\,dx$; *б)* $2\int\limits_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$; *в)* $\int\limits_{-1}^2 (4 + 2x - 2x^2)dx$.

250. Площадь фигур на рисунке 92: *а)* $\int\limits_{-1}^0 (x + 1)dx + \int\limits_0^{0,5\pi} \cos x dx$; *б)* $2\int\limits_0^2 \left(\frac{8}{x^3+4} - \frac{x^2}{6}\right)dx$; *в)* $2\int\limits_0^1 (1 - x^2)\,dx$. **251.** 1) $2\int\limits_0^1 (1 - x^2)\,dx$; 2) $\int\limits_{-3}^{-1} (x^2 - 1)\,dx + \int\limits_{-1}^1 (1 - x^2)\,dx + \int\limits_1^2 (x^2 - 1)\,dx$; 4) $\int\limits_{-1}^2 (\sqrt{18 - x} - 2^x)\,dx$.

252. 1) Объём тела на рисунке 93: *а)* $\int\limits_0^{0,5\pi} \pi\sin^2 x dx$; *б)* $\int\limits_0^4 \pi x dx - \int\limits_0^4 \frac{\pi x^4}{64}\,dx$; 2) объём тела на рисунке 93: *а)* $\int\limits_0^1 \pi \arcsin^2 y dy$; *б)* $\int\limits_0^2 8\pi x dx - \int\limits_0^2 \pi x^4 dx$. **253.** $\int\limits_0^h (P_0 + \rho g x)\frac{a(h-x)}{h}\,dx$, где $P_0 \approx 10^5$ Па — атмосферное давление, $\rho \approx 1000$ кг/м^3 — плотность воды, $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. **254.** $\int\limits_0^H \frac{S}{H^2}x^2\,dx$.

П. 13

255. 2, 3, 4, 5 — является на $D(F)$. **256.** 1) Для $q(x)$; 2) для $q(x)$; 3) для $g(x)$. **257.** $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x=0,\\ 1+2x\sin\frac{5}{x}-5\cos\frac{5}{x} \text{ при } x\neq 0.\end{cases}$ **260.** 1) $F(x)=2-\frac{\cos 2x}{2}$; 2) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{2}{3}$; 3) $F(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}e^{-3x}$; 4) $2-\sin x-\cos x$; 5) $\frac{1}{3}x^3-3\ln(-x)+4\frac{1}{3}$; 6) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x-\frac{2}{3}$, при $0<x<\frac{\pi}{3}$. **262.** 1) 9; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}$; 5) 14; 6) 11. **263.** 1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $1-\frac{\pi}{4}$; 4) 4. **264.** $F(x)=\begin{cases}0{,}5x^2+C \text{ при } x\geqslant 0,\\ -0{,}5x^2+C \text{ при } x<0\end{cases}$ или $F(x)=0{,}5x|x|+C$. **265.** 1) Верно; 2) неверно; 3) верно. **266.** 1) $F(x)=x^3+\frac{x^4}{4}+C$; 3) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x+C$ на любом из промежутков $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $F(x)=0{,}5x+0{,}25\sin 2x+C$. **267.** 2) $\ln(3-x)+\frac{x^2}{4}-x-10$. **268.** $f(x)=\begin{cases}x^{-1}+5 \text{ при } x<0,\\ x^{-1}+C \text{ при } x>0\end{cases}$ или $f(x)=\begin{cases}x^{-1}+5 \text{ при } x<0,\\ C_1 \text{ при } x=0,\\ x^{-1}+C_2 \text{ при } x>0,\end{cases}$ где C, C_1 и C_2 — любые числа. **269.** 1) $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{x}-41 \text{ при } x>0,\\ \frac{4}{3}x^3+\frac{9}{x}-C_1 \text{ при } x<0,\\ C_2 \text{ при } x=0\end{cases}$ или $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{x}-41 \text{ при } x>0,\\ \frac{4}{3}x^3+\frac{9}{x}-C \text{ при } x<0.\end{cases}$

270. 1) $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+\frac{9}{2}$; 2) $F(x)=\frac{2x^3}{3}-\frac{1}{3}$ или $F(x)=\frac{2x^3}{3}+2\frac{1}{3}$. **271.** 1) а) $a=1$, $b=6{,}25$; б) $(-1{,}5;\ 4{,}75)$ и $(1{,}5;\ 7{,}75)$; в) $\frac{9}{4}$; 2) а) $a=-2$, $b=-\frac{21}{4}$; б) $\left(-\frac{7}{2};\ \frac{7}{4}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{17}{4}\right)$; в) $\frac{9}{4}$. **272.** 2) 2,25. **273.** $16\frac{1}{8}$ и $5\frac{5}{24}$. **274.** $k=2$. **275.** 2) Наименьшее значение равно $-\frac{4}{3}$, наибольшего значения нет. **278.** 1) 200 м; $s_1-s_2=\int\limits_0^5(6t^2+2t)\,dt-\int\limits_0^5(4t+5)\,dt$. **279.** $14\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$. **280.** 2) $\approx 0{,}64k$. **281.** 1) $\frac{256\pi}{3}$; 3) $\frac{1024\pi}{5}$; 4) 8π;

5) 0,3π; 6) 9,6π. **284.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}l^3$. **285.** $H = \frac{4}{3}R$, $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$. **286.** $\frac{p^3\pi}{12}$.

287. $\sqrt{2}$. **288.** 340 м. **289.** $\approx 1{,}2 \cdot 10^7$ Н.

Глава 5

Уравнения, неравенства и их системы

П. 14

291. –1 и 2. **292. 1)** а) ±1, ±7; 1 — корень; б) ±1, ±3; в) ±1, ±2; г) ±1, ±2, ±4. **293.** 1) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 16x - 15$; 2) –1 и 3; 3) $P(1) = -28$, $P(-3) = -12$, $P(-5) = -160$, $P(5) = 180$. **294.** 2) а) $Q(x) = 3x^3 - 8x^2 - 19x - 80$, $Q(5) = 0$ (табл. 1); б) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 10x - 12$, $Q(-2) = -52$ (табл. 2); в) $Q(x) = 2x^3 + 7x - 5$, $Q(-3) = -80$ (табл. 3).

Таблица 1

	3	–8	–19	–80
5	3	7	16	0

Таблица 2

	1	–3	10	–12
–2	1	–5	20	–52

Таблица 3

	2	0	7	–5
–3	2	–6	25	–80

295. а) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 7 = (((2x + 3)x - 5)x - 4)x + 7$; $P(-1{,}8) \approx 1{,}50$; $P(1{,}3) \approx 5{,}65$; б) $P(x) = x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 4 = (((x^2 - 3)x + 5)x - 2)x + 4$; $P(-0{,}27) \approx 4{,}96$; $P(2{,}7) \approx 119{,}49$. **296.** 1) 1; 2) –2; 3) –5, 2; 4) –3, 1; 5) 1; 6) –1, ±2; 7) –3, –1; 8) ±1, 2, 3.

П. 16

302. 5) $-\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n$ и $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **303.** 1) $1 \pm \sqrt{6}$; 2) 1 и –6; 5) 1,2 и 2,4; 6) 35; 0; $2\log_3 5$; 7) $\frac{\pi}{5}n$, $\frac{\pi(2n+1)}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi}{2} + \pi n$ и $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **304.** 1) 3; 2) $x = \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) 1; 2; 5) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$;

7) $\log_2(\pi + 2\pi k) - 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; 8) $[5; 10]$; 9) $\frac{1}{9}$; 1; 3; 10) 3 и -5; 11) -2 и 6. **305.** 1) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 2) $x > 0$; 3) $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (1; \sqrt{125})$; 4) $0{,}01 < x < 10$. **306.** 1) 5; $-\frac{1}{2}$ и -3; 2) -2; $\frac{1}{3}$; 1; 3; 3) 3; 4) 3; 5) 0; 6) -1; 7) 2; 8) -2; 9) -2; 10) -2. **307.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) корней нет; 3) 0; 4) 1; 5) корней нет; 6) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **308.** 1) $x \neq 0$; 2) все действительные числа; 3) нет решений; 4) все действительные числа; 5) $x \geqslant 2$; 6) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n > 6$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **309.** 1) $-2{,}5$; -2; $0{,}5$ и 1; 2) -4 и 2; 3) 0; 4) 4; 5) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\pi n \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) -1 и 1; 8) -2; -1; 1; 2. **310.** 2) $\frac{4}{3}$; πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $0{,}001$, 10; 5) 16; 7) 0; 8) 2. **311.** 2) 3; 3) 1; 4) 1; 6) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и при этом $n < 2$, $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{N}$ и при этом $n > 2$; 10) $\pm 0{,}3 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 11) $\cos\frac{2\pi k}{7}$, $k = 1, 2, 3$ и $\cos\frac{\pi(2k+1)}{9}$, $k = 0, 1, 2, 3$; 12) $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$ и $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; 13) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

П. 17

313. а) $\left(-\frac{10}{7}; \frac{19}{7}\right)$; б) $(1; 2)$. **314.** а) $(3; 2)$; б) $(3; -2)$; е) $(1; 2; -3)$ д) $(2; 3)$ и $(-3; -2)$; г) $(7; -3)$ и $(-7; 3)$. **315.** $P(3) = 0$. **316.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}(m + n); \frac{\pi}{2}(m - n)\right)$, $m, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{13}(2k + 6n); \frac{\pi}{13}(3k - 4n)\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **317.** 1) $(1; -3)$. **318.** 1) $(5; 3)$; 2) $(1; 2)$; 4) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$; 5) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\pi(2n + 1); \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **319.** 1) $(2; 6)$ и $(0{,}5; 10)$; 2) $(4; 16)$; 3) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$ и $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(\operatorname{arctg}(2 - 0{,}8\sqrt{5}) + \pi m; \operatorname{arctg}(2 - 0{,}8\sqrt{5}) + \pi n)$ и $(\operatorname{arctg}(2 + 0{,}8\sqrt{5}) + \pi m; \operatorname{arctg}(2 + 0{,}8\sqrt{5}) + \pi n)$, $m, n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $(2; 2)$; 6) $(3; 2)$; 7) $(41; 40)$; 8) $(12; 4)$ и $(34; -30)$. **320.** 1) $(5; -1)$ и $(-5; 1)$; 2) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$ и

$\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **321.** 1) (3; 4) и (4; 3); 2) (1; 4), (4; 1), $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$; 4) (4; 9) и (9; 4); 5) (4; 1) и (1; 4); 6) (1; 2) и (2; 1). **322.** 1) 6; 2) нет решений; 3) 3 и 7; 4) 2 и 6; 5) 7; 6) 0; 8) ±40. **323.** 2) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{8\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1};\ \frac{8}{\sqrt{10}+1}\right)$; 4) (100; 10); (0,1; 0,01); 5) (8; 8); 6) $\left(\frac{\pi}{6}(6k\pm 1);\ \frac{\pi}{4}(4n\pm 1)\right)$, n и k — числа одной чётности; 7) $\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ 2\pi n\right)$, $k,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 10) $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{1}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 12) (12; 12); 13) $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $y_1 = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$; $x_2 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $y_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

П. 18

325. 1) $a = 2$; 2) $a = \frac{1}{2}$. **326.** 1) Если $a \neq -4$ и $a \neq 3$, $x = \frac{a+1}{a+4}$; если $a = -4$, решений нет; если $a = 3$, любое действительное число; 2) если $a \neq 1$ и $a \neq 3$, $x = \frac{a-5}{a-3}$, если $a = 3$, решений нет; если $a = 1$, любое действительное число. **327.** 1) $b = -\frac{157}{42}$; 2) $a = 0$. **328.** $S = 2d$ при $d \in (0;\ 3]$, $S = \sqrt{p(p-4)(p-5)(p-d)}$, где $p = 0{,}5\ (9 + d)$ при $d \in (3;\ \sqrt{41})$, $S = 10$ при $d \in [\sqrt{41};\ +\infty)$. **329.** 1) б) $a = -0{,}5$; в) $a = 1$, $a = \frac{7}{3}$; г) $a = -1$; 2) $-\frac{4}{3} < a < 0$. **331.** 1) $a \in \left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right] \cup (5;\ +\infty)$; 2) $a \in \left(\frac{2}{3};\ 5\right]$. **336.** 1) При $m \geqslant 1$ корней нет; при $m < 1$ $x = \frac{1-m\pm 2\sqrt{1-m}}{m-1}$; 2) корней нет при $m = 1$, $m = \frac{9}{4}$ и $m = -\frac{2}{5}$; единственный корень $x = \frac{31-2m}{4m-9}$ при $m \neq 1$, $m \neq \frac{9}{4}$ и $m \neq -\frac{2}{5}$; $m = 1$ не является допустимым. **337.** 1) $a = 1$. **338.** 1) $\left(-\infty;\ \frac{a(a+2)}{2a+3}\right)$ при $a \in (-\infty;\ -2) \cup \left(-\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; $\left(\frac{a(a+2)}{2a+3};\ +\infty\right)$ при $a \in \left(-2;\ -\frac{3}{2}\right)$; нет решений при $a = \frac{-3}{2}$; 2) $\left[\frac{2a(a-4)}{3a-13};\ +\infty\right)$ при $a \in \left(4;\ \frac{13}{3}\right)$; $\left(-\infty;\ \frac{2a(a-4)}{3a-13}\right]$ при $a \in (-\infty;\ 4) \cup \left(\frac{13}{3};\ +\infty\right)$; $(-\infty;\ +\infty)$ при $a = \frac{13}{3}$. **339.** 1) 2; 2) ±2.

340. 1) $\frac{-2-\sqrt{3}}{2} < a < 0$, $0 < a < \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$; 2) $a < \frac{7}{8}$. **342.** 1) $a > 4$; 2) 1 и 4; 3) $a \leqslant 0$, $a = 1$. **344.** 1) $a \in (-1; 0)$; 2) $a \leqslant 0$, $a = \frac{1}{4}$. **345.** 1) При $a = 3$ единственный корень; при $2 < a < 3$ два корня; в остальных случаях корней нет; 2) при $a = 3{,}5$ единственный корень; при $3{,}5 < a < 5$ два корня; в остальных случаях корней нет. **346.** 1) $b < -2$; 2) $-2 < b < 0$. **347.** Таких значений d нет. **348.** 1) $|b| \leqslant \frac{3}{4}$; 2) $a = -\sqrt[3]{48}$, $a \leqslant -4$, $a > 1$. **349.** $t > 2{,}5$. **350.** $c \leqslant 0$, $c \geqslant \frac{2}{3}$. **351.** 1) $2\sqrt{2} < a \leqslant 3$; 2) $a < -\frac{1}{4}$, $a = 2$, $5 < a \leqslant 6$. **352.** $-2 < a < 0$. **353.** $|a| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$. **354.** $m \in \left[-\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}); -4 + 2\sqrt{3}\right]$. **355.** 1) 1; 5 и 9; 2) $(-\infty; 2) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$.
357. 1) $\frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$, $\frac{a}{2}$ при $a \geqslant -\frac{1}{4}$; $\frac{a}{2}$ при $a < -\frac{1}{4}$; 2) корней нет при $a < -\frac{1}{4}$; один корень $-\frac{1}{2}$ при $a = -\frac{1}{4}$, два корня $\frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ при $-\frac{1}{4} < a < 0$, два корня 0 и -1 при $a = 0$, четыре корня $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ и $\pm\sqrt{2a}$ при $a > 0$. **358.** 1) $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$ и $\frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$; 2) $\sqrt{2}$; $\frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **359.** 1) $a \leqslant \frac{1}{2}$. **363.** 1) Если $c \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$, то $x = \pm \arccos \frac{4c+1}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $c \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — решений нет; 2) $b \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{b-3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $b = -3$, то x любое действительное число; если $b \in (2; 4)$, решений нет; 3) при $a = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; при $a \neq 1$ решений нет; 4) при $a = 0$ $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; при $a \neq 0$ решений нет. **364.** $|a| \geqslant 3\sqrt{3}$. **365.** 1) Ни при каких a; 2) $a \leqslant 0$, $a = 0{,}5$, $a > 1$; 3) $a = 1$; 4) $0 < a < 0{,}5$, $0{,}5 < a < 1$. **366.** 1) $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$; 2) $a < -\frac{1}{2}$, $a \geqslant 0$; 3) $a \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 4) $a = \pi s$, где s — иррациональное число. **367.** 1) $a = b = -2$; 2) $a = b = \pm 1$.

Глава 6

Элементы теории вероятностей и статистики

П. 19

368. 1) $P(A) = 0{,}5$; 2) $P(B) = 0{,}5$; 3) $P(AB) = \frac{1}{3}$; 4) $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{2}{3}$.

369. 1) Событие $\bar{A}\bar{B}$ состоит в том, что не вытащен ни белый, ни чёрный шар, т. е. вытащен синий шар; 2) событие $A + B$ состоит в том, что вытащен или белый, или чёрный шар, т. е. не вытащен синий шар. **370.** $\frac{8}{17}$. **371.** 1) $P(A) = P(C) = P(D) = 0{,}5$, $P(B) = \frac{1}{3}$; 2) $P(AB) = \frac{1}{6}$, $P(CD) = \frac{1}{3}$, $P(AD) = P(BD) = \frac{1}{6}$; 3) $P(A + B) = P(C + D) = P(B + D) = \frac{2}{3}$, $P(A + D) = \frac{5}{6}$; 4) $P(B/A) = P(D/A) = \frac{1}{3}$, $P(D/B) = \frac{1}{2}$, $P(C/D) = \frac{2}{3}$. **372.** 1) 0,3; 2) $\frac{15}{55} = \frac{3}{11}$. **373.** 1) 0,5; 2) $\frac{1}{3}$. **374.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$. **375.** 1) $\frac{7}{16}$. **376.** $\frac{11}{18}$. **377.** 1) $\frac{35}{192}$; 2) $\frac{21}{64}$; 3) $\frac{47}{96}$. **378.** 1) 0,12; 2) 0,58; 3) 0,42. **379.** 0,14. **380.** 0,994. **381.** 1) 0,72; 2) 0,98; 3) 0,26. **382.** 1) 0,182; 2) 0,452; 3) 0,336. **383.** 1) 0,28; 2) 0,096; 3) 0,024. **384.** 1) 0,006; 2) 0,092; 3) 0,994. **385.** 0,9995, т. е. цель практически наверняка будет поражена. **386.** 0,57. **387.** У Оболенского. С вероятностью 86% он останется на ногах. **388.** $\frac{20}{21}$. **389.** 0,9999. **390.** Не меньше пяти выстрелов. **391.** 0,8. **392.** Да. Выбрав оставшийся ящик, играющий вдвое увеличивает свой шанс получить приз.

П. 20

393. 1) 20; 2) 15. **394.** 1) а) 4,9 с; б) 15,5; в) 15,8; г) 16,0. **397.** 1) 50; 2) размер одежды; 3) число женщин; 4) мода выборки — 48-й размер; медиана выборки — 50-й размер; математическое ожидание — 49 (однако такого размера и не бывает). **398.** 1) 60; 2) размах равен 49, медиана 130, мода 130, математическое ожидание 117. **399.** Женщины: 22,5—3; 23—5; 23,5—12; 24—13; 24,5—9; 25—5; 25,5—2; 26—1; мужчины: 25,5—4; 26—8; 26,5—8; 27—10; 27,5—9; 28—7; 28,5—

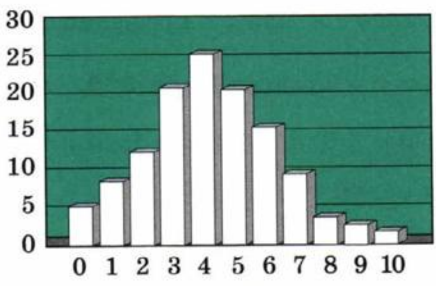


Рис. 139

3; 29—1. **402.** 1) Гистограмма (рис. 139); 2) среднее арифметическое число попаданий в корзину равно четырём. **406.** 0,49. **407.** 7.

Глава 7

Комплексные числа

П. 21

408. 1) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}$; 3) 4; 4) 4. **410.** $AB \approx 3{,}14$.

П. 22

411. 1) $-5 \pm i$; 2) $7 \pm 5i$; 3) $\frac{1}{3} \pm \frac{2i}{3}$; 4) $\frac{5}{4} \pm \frac{i\sqrt{7}}{4}$. **412.** 1) $x_1 = 1$, $(x-1)(x^2+2x+3) = 0$, $x_{2,\,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$; 2) $x_1 = -1$; $x_{2,\,3} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$; 3) 1, $\frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 4) 2, $\frac{3 \pm i\sqrt{31}}{4}$; 5) 3, $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{4}$. **413.** 1) $x^2 - 2x + 2 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 25 = 0$. **414.** 1) $-7 + 9i$; 2) $24 + 2i$; 3) $1 + i$; 4) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$; 5) $-\frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$; 6) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. **415.** 1) Числа сопряжённые; 2) равные коэффициенты при мнимых частях; 3) частные от деления действительных частей на коэффициенты при мнимых частях отличаются только знаком или оба числа действительные, или одно из них равно нулю; 4) частные от деления действительных частей на коэффициенты при мнимых частях равны или оба числа действительные, неравные нулю, или делимое равно нулю, а делитель нет. **416.** 1) $-2 + 5i$; 2) -10; 3) 3; 4) 5,6. **417.** 1) $a = 2$, $b = -3$; 2) $a = 7\frac{7}{13}$, $b = 4\frac{9}{13}$; 3) $a = 3$, $b = 2$ или $a = -3$, $b = -2$. **418.** 1) $a = -0{,}3$; $b = -\frac{29}{3}$; 2) $a = -\frac{5}{4}$; $b = 4$. **419.** 1) $x = 2$, $y = 1$ или $x = -2$, $y = 1$; 2) $x = -1$, $y = 2$ или $x = 1$, $y = -2$.

П. 23

421. A: $6 + 6i$, $r = 6\sqrt{2}$; B: $-6 + 4i$, $r = \sqrt{52}$; C: $-3 - 4i$, $r = 5$; D: $3 - 4i$, $r = 5$. **425.** 1) Левая координатная полуплоскость без оси ординат; 2) круг радиусом 2 с центром в точке $(-1; -2)$ с выколотым центром; 3) верхняя координатная полуплоскость с осью абсцисс.

П. 24

430. 1) $5(\cos 0° + i\sin 0°)$; 2) $2(\cos(-90°) + i\sin(-90°))$; 5) $2\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$; 7) $3\sqrt{2}(\cos 225° + i\sin 225°)$; 10) $\cos 120° + i\sin 120°$; 12) $2(\cos 210° + i\sin 210°)$. **431.** A: $6\sqrt{2} \times \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

B: $\sqrt{52}\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)\right)$; C: $5\left(\cos\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + + i\sin\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$; D: $5\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$.

432. 1) $\operatorname{arctg} 2$; 2) $\pi + \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$; 4) $-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **433.** 1) $\sqrt{3} + i$; 2) $1 - i$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; 4) $1{,}8 - 2{,}4i$. **434.** 1) $6i$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. **436.** 1) ≈ 1; 2) $\approx -0{,}84$; 3) $\approx -0{,}376$. **439.** 0. **440.** 0; i; $-i$. **441.** 1) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$; 2) $\sqrt[3]{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = -10°, 110°, -130°$; 3) $\sqrt[8]{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = -33{,}75°, 56{,}25°, 146{,}25°, 236{,}25°$; 5) $\cos\varphi + i\sin\varphi$, где $\varphi = 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°$.
442. 1) $\sqrt[3]{4}(\cos(20° + 120°\cdot n) + i\sin(20° + 120°\cdot n))$, где $n = 0, 1, 2$; 2) $z_{1,\ldots,6} = \cos(25° + 60°\cdot n) + i\sin(25° + 60°\cdot n)$, где $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **443.** 1) -2, $1 - i$, $1 + i$, 2) 3, $-1 - i\sqrt{3}$, $-1 + i\sqrt{3}$.

Советы

Глава 1

Непрерывность и пределы функций

П. 1

2. 1) На концах отрезка многочлен принимает значения разных знаков. Найдите его знак в середине отрезка и определите, в какой из половин содержится корень. 2), 3) Каждую такую половину снова делите пополам до тех пор, пока не получится отрезок с длиной, меньшей 0,01. Середина этого отрезка (с округлением до сотых) и будет искомым приближением. **5, 6.** О преобразованиях графиков прочитайте в учебнике 10 класса. **7.** Сравните области определения функций, заданных аналитически и графически. **8.** Сравните области определения этих двух функций. **12.** Модуль разности двух чисел показывает, на каком расстоянии друг от друга числа расположены на числовой прямой. **15.** Для любого положительного ε укажите положительное δ так, чтобы $\sqrt{\delta} < \varepsilon$. **19.** Достаточно взять $\varepsilon = 0{,}5$. **20.** Для любого ε можно взять δ таким, что в δ-окрестности иррациональной точки останутся только дроби со знаменателями большими, чем $\frac{1}{\varepsilon}$.

П. 2

22. Доказательство аналогично приведённому в п. 1 доказательству непрерывности. **25.** 6) Преобразуйте числитель и знаменатель в произведения и сократите дробь. **26.** 4) Постройте график. **30.** Воспользуйтесь непрерывностью слева и справа. **32.** 2) а) Для любого значения функции $f(x)$ можно указать число a, большее $f(x)$; б) поскольку a можно брать как угодно большим по модулю отрицательным числом, среди значений функции должны быть числа ещё меньшие (получили определение функции, не являющейся ограниченной снизу); 3) для любого числа a должно существовать значение функции больше его. **33.** Попробуйте дать графическую интерпретацию.

П. 3

40. 1) г) Внесите x под знак корня. **41.** 3), 4) Проще всего разделить числитель на знаменатель в столбик. **42.** 2) Не забудьте, что обозначение $\lim = \infty$ используется в случае, когда предела нет. **48.** 1) К функции $|x|$ прибавили что-то, что при $x \to \infty$ стремится к нулю, а при $x \to 0$ стремится к бесконечности, оставаясь всё время положительным; 2) правую ветвь хорошо знакомого графика подняли на 1, а левую опустили на 1. **50.** 2) Члены последовательности с достаточно большими номерами близки к b.

Глава 2

Производная функции

П. 4

52. Используйте транспортир и линейку. **55.** 2) Угловые коэффициенты считайте, используя клетки тетради. **56.** 1) Найдите угловой коэффициент как предел или воспользуйтесь результатом примера 1 с учётом симметрии графика относительно оси ординат и сдвига; 2) найдите угловой коэффициент как предел или используйте графические соображения, поскольку речь идёт о вершине параболы. **58.** Напишите уравнение касательной с абсциссой точки касания x_0 в общем виде и подставьте в него координаты данной точки. **59.** Найдите угловой коэффициент в общем виде, а затем приравняйте его данному числу. **60.** Поскольку угол между касательными равен разности их углов наклона, воспользуйтесь формулой тангенса разности двух углов. **62.** Углы наклона касательных отличаются на 90°: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right) = -\operatorname{ctg}\alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}$, т. е. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. **63.** Касательная к параболе имеет с ней единственную общую точку, значит, дискриминанты соответствующих уравнений равны нулю.

П. 5

68. Дифференцируемая функция может чередовать свои промежутки возрастания и убывания, в то время как её график будет стремиться к слиянию с асимптотой. Представьте себе, что он как бы наматывается на асимптоту. **69.** На отдельных промежутках данные графики прямолинейны —

производная на них постоянна. **70.** Воспользуйтесь графическими соображениями о расположении касательных к графику функции в точках с противоположными абсциссами. **78.** 4) Произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1. **82.** Воспользуйтесь результатами примера 1 данного пункта. **84, 85.** Скорость изменения — это производная функции. **87.** Используйте формулу кинетической энергии: $E = \frac{mv^2}{2}$.

П. 6

95. Некоторые из графиков имеют изломы, в которых касательных к нему нет. **96.** Полезно вначале очертить на координатной плоскости прямоугольник, в котором расположен искомый график. **97.** Можно воспользоваться знанием того, как выглядят графики данных функций. **100.** 1) Из равенства значений функции следует равенство значений аргумента и обратно, значит, функция обратима. Можно взять, например, любую монотонную функцию. **101.** Используйте идеи симметрии и сдвига. **102.** Воспользуйтесь тем, что число ненулевых точек экстремума чётно, если множество точек экстремума конечно.

Глава 3

Техника дифференцирования

П. 7

111. Приложите линейку вместо оси абсцисс к графику на рисунке 64 и считайте число точек пересечения с графиком в зависимости от её положения. **112, 113.** Изобразите эскиз графика. **114.** Воспользуйтесь теоремой Лагранжа или рассмотрите касательную в точке, наиболее удалённой от оси абсцисс, между двумя нулями функции. **117.** Раскройте скобки. **127.** 3, 4, 5) Не забудьте проверить, нет ли у графика наклонной асимптоты. **130.** Используйте формулу производной произведения двух функций, представив: $uvw = u(vw)$.

П. 8

143. Угловой коэффициент общей касательной можно найти как значения производных первой и второй из данных функций и как угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, где $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — точки касания. **145, 146.** 4), 5), 6) Поступайте так же, как в примере 2. **148.** Не забудьте об асимптотах.

П. 9

149. 1) г) Используйте формулу косинуса двойного угла; 2) г) умножьте и разделите числитель и знаменатель дроби на $9x$ и представьте его в виде произведения; 3) а) представьте выражение под знаком предела как квадрат; б) сделав замену переменных $y = \frac{1}{x}$, получите нужный предел; в) введите новую переменную $y = \frac{x}{m}$ и поступайте, как в а). **152.** Масса цезия-135 в результате радиоактивного распада изменяется по закону $m(t) = m_0 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{31}}\right)^t$. Примите начальную массу цезия за 1, а время измеряйте в годах. **155.** Представьте выражение $\log_t(t+1)$ как частное натуральных логарифмов. **161.** 2), 4). В некоторых точках производная обращается в нуль. Покажите, что они являются точками возрастания. **163.** Как уже говорилось, в нуле производные этих функций равны 1. **166.** 1), 2) Можно перейти к двойному углу, тогда не нужно будет искать производные и приравнивать их нулю; 3) можно воспользоваться чётностью и убыванием данной функции при $x \geqslant 0$. **167.** По данной производной можно найти бесконечно много функций, отличающихся на константу. Выберите наиболее простую, поменяйте местами x и y и выразите y через x. **168.** Не забывайте об области определения и там, где возможно, вместо дифференцирования используйте свойство монотонности сложной функции. **171.** В точках, где производная стремится к бесконечности. **173.** Достаточно показать, что производная функции во всех точках промежутка равна нулю. **178.** Площадь такого треугольника равна модулю полупроизведения абсциссы и ординаты точек пересечения касательной с осями координат. **179.** Подумайте, чему должен быть равен угловой коэффициент такой касательной, и не забудьте, что речь идёт о положительных полуосях. **185.** 1) Чтобы найти производную в нуле, подумайте о том, как ведёт себя секущая; 2) посмотрите, что происходит со знаком производной, когда x приближается к нулю.

П. 10

187. В 1), 3) и 7) постарайтесь дать ответ без дифференцирования. **188, 189.** Сделайте эскиз графика. **190.** 1) Речь идёт о наименьшем значении суммы взаимно обратных величин; 2) не забудьте, что косинус по модулю не больше 1. **192.** 1) Как 190 1); 2) придётся дифференцировать; 3) надо увидеть квадратный трёхчлен. **193.** Одно из чисел, конечно, x. **195.** Можно написать уравнение прямой, проходящей через данную точку, найти её пересечения с осями координат и выразить площадь треугольника как функцию углового коэффициента этой прямой, можно использовать и геометрические знания. Подумайте, как через точку внутри угла провести прямую, которая отсекает от угла треугольник наименьшей площади. **198.** Здесь нет необходимости использовать производную. Сначала покажите, что из всех треугольников с данным основанием наибольшая высота у равнобедренного, а затем возьмите боковую сторону за новое основание и повторите рассуждение. В каком случае второго увеличения не произойдёт? **202.** Если две стороны треугольника даны, наибольшая площадь будет, когда они являются катетами. **203.** Замените полученный треугольник более простым равновеликим треугольником. **204.** Нужно взять максимальными длины двух сторон и сделать их катетами. При этом, правда, длина третьей стороны должна позволить ей стать гипотенузой. **206.** За x обычно принимают величину, которая возводится в квадрат, — в данных случаях это радиус основания цилиндра. **207.** 2) Преобразуйте $y(x)$ к виду

$$y = x + |x+3||x+1| = x - (x+1)|x+3| \left(x + 1 < 0 \text{ при } -4 \leqslant x \leqslant -\frac{5}{4} \right).$$

208. Соотношение между числами такое же, как и между их логарифмами. Прологарифмируйте и сравните значения одной и той же функции при $x = e$ и при $x = \pi$. **209.** 1) Покажите, что искомый случай соответствует наименьшему модулю разности между точками с одной и той же абсциссой; 2, 3) если точки ближайшие друг к другу, то касательные в них параллельны между собой. Используйте симметрию графиков. **214.** Полезно знать, что своё наибольшее значение произведение положительных величин с фиксированной суммой имеет в случае равенства величин. Тогда можно решить задачу без производной. Впрочем, поскольку площадь выразится квадратным трёхчленом, использовать производную всё равно нерационально. **218.** Подумайте, как выразить длину судна, когда оно касается бортом угла канала. **219.** Как и в 213, но потом, добавив третье измерение, найдите как диагональ параллелограмма.

П. 11

226. Среднее арифметическое значений на концах меньше, чем в середине промежутка выпуклости, и больше, чем в середине промежутка вогнутости. **229.** Выяснить характер поведения функции в критической точке поможет вторая производная. **230.** Ваши предыдущие встречи (185 из п. 9) с этой функцией показали, что её производная в нуле разрывна. **236, 238, 240.** Мы говорили об И. Ньютоне как о создателе математического анализа, а здесь придётся вспомнить о его знаменитом физическом законе $F = ma$.

Глава 4

Интеграл и первообразная

П. 12

245. В отличие от обычной трапеции, фигура является криволинейной трапецией, если она определённым образом расположена относительно осей координат. **246.** Нарезав фигуру на вертикальные полоски равной толщины, заменяем каждую прямоугольником с основанием Δx и высотой $f(x) - g(x)$. Далее рассуждаем, как в случае криволинейной трапеции. **252.** 2) Переименуйте оси и переменные, после чего примените формулу объёма тела вращения. Собственно, всё сводится к замене ограничивающих функций обратными им.

П. 13

257. Собственно, это та же задача, что и 185 из пункта 9. **260.** 6) Не забудьте указать промежуток, на котором определена искомая первообразная. **262.** 5), 6) Вспомните, какое преобразование связано с переходом к модулю аргумента. **265.** Не забудьте, что от вертикального сдвига графика функция не теряет звания первообразной. **266.** 4) Формулы такой нет, но можно понизить степень косинуса. **268.** Проблема, конечно, в области определения первообразной, поскольку область определения функции, имеющей данную производную, не обязательно является промежутком. **271.** Поскольку соответствующие параболы получаются одна из другой параллельным переносом, их общая касательная должна быть параллельна прямой, соединяющей их вершины. **275.** После применения формулы Ньютона—Лейбница получится функция с аргументом a. Её наименьшее и наибольшее значения и надо найти. **278.** 1) Расстояние между точками — первообразная от разности их скоростей, значение которой нуль при $t = 0$. **289.** Давление воды пропорционально высоте её столба, нужно учесть атмосферное давление. **290.** Работа по укладке блока пирамиды пропорциональна высоте, на которую его подняли.

Глава 5

Уравнения, неравенства и их системы

П. 14

297. Достаточно проверить делители свободного члена.

П. 16

304. 7) Сделайте замену $2^x = b$ и используйте формулу $\mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$. **309.** 5) Раскройте скобки и введите новую переменную $t = \sin 2x$; 8) сделайте замену переменных $2^x - 2^{-x} = y$.

П. 17

317. 3) Перейдите к сумме и разности уравнений, затем примените формулы синуса суммы и разности аргументов; 4) перейдите к сумме и разности уравнений. **319.** 5) Сделайте замену переменных $3^x = a$, $2^{\frac{y}{2}} = b$; 6) сделайте замену переменных $2^x = a$, $3^y = b$; 8) сделайте замену $\sqrt{x+y} = u$, $\sqrt[3]{x-y} = v$. **323.** 6) Возведите уравнения системы в квадрат; 10) сделайте замену переменных $u = \sin x$, $v = \log_y 3$; 12) представьте первое уравнение в виде $\sin\dfrac{x}{2} - x = \sin\dfrac{y}{2} - y$ и исследуйте на монотонность функцию $f(z) = \sin\dfrac{z}{2} - z$.

П. 18

328. Постепенно увеличивайте длину стороны c от нуля до $+\infty$. Рассмотрим сначала треугольник со сторонами 4 и c, затем со сторонами 4, 5 и c и, наконец, со сторонами 4 и 5. Наибольшую площадь при данных длинах двух своих сторон имеет треугольник, у которого эти стороны являются катетами. Однако при этом третья сторона должна оказаться гипотенузой. **329.** Подставьте число 2 вместо x. **331.** Из рассмотрения исключите значение a, при котором уравнение теряет смысл. 1) Правая часть уравнения должна быть неположительной; 2) правая часть должна быть больше 1. **332.** Ответ на этот вопрос зависит от величины коэффициента при старшем члене. **337.** Уравнение должно иметь два корня, сумма которых равна a. **352.** Точка пересечения парабол должна находиться ниже оси абсцисс. **353.** Корни второго уравнения расположены между корнями первого. **354.** Подумайте, какими должны быть значения трёхчлена при $x = 1$ и при $x = 2$. **355.** 2), 3) Попробуйте решить графически. **356.** Один из экстремумов должен быть равен нулю. 1) Отнеситесь к параметру как к переменной; 2) рассмотрите уравнение как квадратное относительно a. **357.** Рассмотрите уравнение как квадратное относительно a. **359.** Изобразите множество решений системы на координатной плоскости: 1) aOx; 2) pOx. **365.** Подумайте, что можно сказать о значениях переменных в случае единственного решения.

Глава 6

Элементы теории вероятностей и статистики

П. 19

370. Искомое событие складывается из извлечения белого и извлечения чёрного шаров. Его вероятность можно найти либо как сумму вероятностей этих несовместных событий, либо просто сосчитав число всех шаров в урне и разделив на него число одноцветных шаров. Ответ: $\frac{8}{17}$.

Глава 7

Комплексные числа

П. 21

409. Замените: 1) $x = y - 3$; 2) $x = y + 2$.

П. 22

420. 2) Обратите внимание на значение суммы первых четырех слагаемых, вторых четырёх слагаемых и т. д. или используйте формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии.

П. 23

423. В заданиях 1) и 2) искомые точки равноудалены от точек в 1) $(1;\ 0)$ и $(-1;\ 0)$, а в 2) от $(-1;\ i)$ и $(1;\ -i)$. В заданиях 3) и 4) следует заменить z на $x + yi$. В заданиях 5) и 6) должно получиться геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до двух данных точек равно некоторому числу: в 5) $2 : 1$, в 6) $1 : 3$. Это окружность Аполлония. Можно получить её уравнение, заменив z на $x + yi$. **424.** Найдите отдельно левую и правую части равенства. **426.** Точка с искомыми координатами — это точка пересечения серединных перпендикуляров к соответствующим отрезкам. Её можно найти построением. **427.** Найдите наиболее удалённую от начала координат точку окружности с радиусом 1 и центром $(-1;\ -1)$. **428.** 1) Найдите ближайшую к началу координат точку окружности с радиусом 3 и центром $(-1;\ -1)$. **429.** Наиболее удалённая от начала координат точка, координаты которой удовлетворяют первому уравнению системы, отстоит от начала координат меньше чем на 3.

РЕШЕНИЯ

Глава 1

Непрерывность и пределы функций

П. 1

15. Для любого положительного ε, взяв $\delta = \varepsilon^2$, получим: $0 \leqslant x \leqslant \delta \Leftrightarrow 0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$, что, поскольку $\sqrt{0} = 0$, и требовалось доказать.

20. Разрывность данной функции в рациональной точке $x_0 = \frac{p}{q}$ (несократимая дробь) доказывается выбором $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. В любой окрестности точки x_0 есть нули функции, для которых не будет выполняться неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$: $\left|0 - \frac{1}{q}\right| > \frac{1}{2q}$. Если x_0 иррационально, для любого $\varepsilon > 0$ выберем δ так, чтобы в δ-окрестности точки x_0 остались несократимые дроби только со знаменателем, большим, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда для любого рационального значения x имеем: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{q} - 0\right| = \left|\frac{1}{q}\right| < \left|\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}\right| = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

П. 2

22. 2) Для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ нужно найти такое число δ, чтобы из неравенства $0 < |x - 4| < \delta$ следовало неравенство $|(0,5x + 2) - 4| < \varepsilon$. Преобразуем $|(0,5x + 2) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |0,5x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|0,5x - 2| < 2\varepsilon \Leftrightarrow |x - 4| < 2\varepsilon$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta = 2\varepsilon$ из неравенства $0 < |x - 4| < \delta$ следует неравенство $|(0,5x + 2) - 4| < \varepsilon$, что и означает

$$\lim_{x \to 4} (0,5x + 2) = 4.$$

25. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x\sin x}{2\sin 2x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}(-\operatorname{tg}x)=0.$

П. 3

39. 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{(x-1)^5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty.$

40. 1) 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}=\sqrt{1-0}=1;$
$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{-\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}\right)=-1.$

41. 4) $\dfrac{x^5-2x^3+1}{x^4+2x+3}=x-\dfrac{2x^3+2x^2+3x-1}{x^4+2x+3}.$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5-2x^3+1}{x^4+2x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2x^3+2x^2+3x-1}{x^4+2x+3}\right)=$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}\right)=\dfrac{0}{1}=0.$ Прямая $y=x$ — наклонная асимптота графика данной функции.

51. Поскольку ось абсцисс — асимптота функции $y=a^x$, $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=0$ при $0<a<1$. По теореме о пределах получаем:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_n\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=$$
$$=\frac{b_1}{1-q}\cdot(1-\lim_{n\to\infty}q^n)=\frac{b_1}{1-q}.$$

Глава 2

Производная функции

П. 4

60. Найдём абсциссу точки пересечения парабол из уравнения: $2x^2-3=2x^2-x+3$, $x=6$. Найдём угловой коэффициент касательной к параболе $y=2x^2-3$ в точке $x_0=6$: $k_1=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(2x^2-3)-(2\cdot 6^2-3)}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}2(x+6)=2\cdot 12=24.$ Найдём угловой коэффициент касательной в точке $x_0=6$ к параболе $y=2x^2-x+3$: $k_2=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(2x^2-x+3)-(2\cdot 6^2-6+3)}{x-6}=$

$= \lim\limits_{x\to 6}(2x+11) = 23$. Тангенс угла между касательными найдём по формуле тангенса разности углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{24-23}{1+24\cdot 23} = \frac{1}{553}.$$

Угол между касательными равен $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{553}$.

62. 2) Угловой коэффициент данной прямой равен $\dfrac{1}{6}$, значит, угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен -6. Найдём угловой коэффициент касательной в точке x_0: $k = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x^2+2x+1)-(x_0^2+2x_0+1)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0+2) = 2x_0+2$. Имеем: $2x_0+2=-6$, $x_0=-4$. Найдём ординату точки касания: $y_0=(x_0+1)^2=(-4+1)^2=9$. Запишем уравнение искомой касательной: $y=-6(x+4)+9$, $y=-6x-15$.

63. Пусть $M(x_0;\ y_0)$ — точка, удовлетворяющая условию задачи. Тогда уравнение произвольной прямой (не вертикальной), проходящей через M, имеет вид $y=k(x-x_0)+y_0$. Условие означает, что дискриминант уравнения $x^2-y_0-k(x-x_0)=0$ равен 0, т. е. $k^2-4kx_0+4y_0=0$. Для того чтобы существовали две касательные, должно выполняться условие $x_0^2-y_0>0$, т. е. $M(x_0;\ y_0)$ находится ниже данной параболы. Пусть k_1 и k_2 — корни последнего уравнения. Перпендикулярность прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 означает, что $k_1k_2=-1$, т. е. по теореме Виета $4y_0=-1$, $y_0=-\dfrac{1}{4}$.

П. 5

72. 5) $\Delta y = \dfrac{x+\Delta x}{x+\Delta x-1} - \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x^2+x\Delta x - x - \Delta x - x^2 - x\Delta x + x}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = \dfrac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$; 6) $\Delta y = \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x(x+\Delta x)}} =$

$$= \frac{x-x-\Delta x}{\sqrt{x(x+\Delta x)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})} = \frac{-\Delta x}{\sqrt{x(x+\Delta x)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x(x+\Delta x)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

73. 2) $\Delta g = 2(x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x)^2 + 2 - 2x^3 + 3x^2 - 2 =$ $= 2\Delta x((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2) - 3\Delta x(x + \Delta x + x) =$ $= \Delta x(2(3x^2 + \Delta x(2x + \Delta x + x)) - 6x - 3\Delta x + x)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (6x^2 - 6x + \Delta x(6x + 2\Delta x - 3)) = 6x^2 - 6x.$$

86. $S(r) = \pi r^2$, $S'(r) = 2\pi r$. $S(3 - 0{,}02) = S(3) + \Delta S \approx$ $\approx S(3) + S'(3)\Delta r = \pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot (-0{,}02) = 8{,}88\pi$ (см^2).

Глава 3

Техника дифференцирования

П. 7

112. 2) Найдём экстремумы функции $y = x^4 + x^3 - 6$: $y' = 4x^3 + 3x^2 = 4x^2\left(x + \frac{3}{4}\right)$. Критические точки: $x = 0$ и $x = -\frac{3}{4}$. Свой знак производная меняет при переходе через точку $x = -\frac{3}{4}$. Знак изменяется с «минуса» на «плюс», значит, в этой точке функция имеет минимум. Этот минимум меньше нуля. Поскольку слева от точки экстремума функция убывает и имеет положительное значение, например при $x = -10$, то она имеет слева единственный нуль. Справа функция возрастает и имеет положительное значение, например, при $x = 10$. Значит, справа от точки экстремума функция также имеет единственный нуль. Таким образом, всего у функции два нуля, т. е. данное уравнение имеет два корня.

113. Найдём экстремумы функции $y = 6x^3 - 2x + a$: $y' =$ $= 18x^2 - 2$, $y' = 0$ при $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{3}$. В точке x_1 функция имеет максимум, равный $a + \frac{4}{9}$, а в точке x_2 — минимум, равный $a - \frac{4}{9}$. 1) Один корень будет, когда максимум меньше нуля или когда минимум больше нуля, т. е. нужно решить совокупность двух неравенств: $\left[\begin{array}{l} a + \frac{4}{9} < 0, \\ a - \frac{4}{9} > 0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a < -\frac{4}{9}, \\ a > \frac{4}{9}; \end{array}\right.$ $|a| > \frac{4}{9}$;

2) два корня будет в случае равенства одного из экстремумов нулю: $|a| = \frac{4}{9}$; 3) три корня будет, когда максимум больше и одновременно минимум меньше нуля: $|a| < \frac{4}{9}$.

121. Графики данных функций симметричны относительно точки (0; 1) (рис. 140). Углы, под которыми они пересекаются, тоже симметричны, а значит, равны.

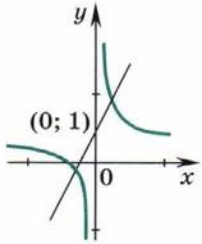


Рис. 140

131. 2) 1 При $n = 1$ имеем $11^2 + 12 = 133$ — число, кратное 133.

2 Предположим, что $11^{k+1} + 12^{2k-1} = 133m$, где m — натуральное число. При $n = k + 1$ получим выражение

$$11^{k+1+1} + 12^{2(k+1)-1}.$$

Рассмотрим сумму этого выражения с числом

$$11^{k+1} + 12^{2k-1}:$$

$$11^{k+2} + 12^{2k+1} + 11^{k+1} + 12^{2k-1} =$$
$$= 11^{k+1}(11 + 1) + 12^{2k-1}(144 + 1) =$$
$$= 11^{k+1} \cdot 12 + 12^{2k-1}(12 + 133) =$$
$$= 12(11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 12^{2k-1} \cdot 133 =$$
$$= 12 \cdot 133m + 12^{2k-1} \cdot 133 = 133(12m + 12^{2k-1}).$$

Это выражение кратно 133. Исходное утверждение доказано.

132. 3) 1 При $n = 2$ равенство верно: $1^3 + 2^3 = \left(\frac{2 \cdot (2+1)}{2}\right)^2$, $9 = 9$.

2 Пусть при $n = k$ верно равенство $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$. Тогда при $n = k + 1$ имеем:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}\right)^2,$$ что и требовалось доказать.

133. 3) 1 При $n = 1$ имеем верное неравенство $4 \geqslant 1 + 3$.

(2) Пусть при $n = k$ верно неравенство $4^k \geqslant k^2 + 3^k$. Тогда при $n = k + 1$ имеем:

$$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k \geqslant 4(k^2 + 3^k) = 4k^2 + 4 \cdot 3^k =$$
$$= k^2 + 2k + 1 + 3 \cdot 3^k - 2k - 1 + 3k^2 + 3^k =$$
$$= (k+1)^2 + 3^{k+1} + (3k^2 - 2k) + (3^k - 1) \geqslant (k+1)^2 + 3^{k+1}, \text{ т. е.}$$
$4^{k+1} \geqslant (k+1)^2 + 3^{k+1}$, что и требовалось доказать.

134. Нужно доказать, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимают только положительные значения и $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n,$$

и что данное неравенство верно при всех $n \geqslant 2$, так как ни в произведении, ни в сумме не может быть по одному члену.

Будем использовать метод математической индукции.

(1) При $n = 2$ имеем: $x_1 \cdot x_2 = 1$. Переменные x_1 и x_2 обратно пропорциональны, как известно, их сумма минимальна в случае $x_1 = x_2$. При этом $x_1 = x_2 = 1$ и $x_1 + x_2 = 2 \geqslant 2$.

(2) Предположим теперь, что для любых k положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, дающих в произведении 1, верно неравенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geqslant k$. Используем это предположение для $k + 1$ переменных таких, что $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$. Должно получиться неравенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1$.

Возможны два случая.

1) Все эти числа равны 1, тогда их сумма *равна* $k + 1$.

2) Среди этих чисел есть хотя бы одно число (обозначим его x_1), большее 1. Тогда, поскольку произведение чисел равно 1, среди них должно встретиться хотя бы одно число, меньшее 1 (обозначим его x_2).

Произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1}$ можно представить как произведение k чисел: $(x_1 \cdot x_2) \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$. Согласно нашему предположению $x_1 \cdot x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant k$. Перенесём $x_1 \cdot x_2$ в правую часть неравенства и добавим к обеим частям по $x_1 + x_2$:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant k - x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2.$$

В правой части неравенства должно оказаться $k + 1$, поэтому добавим и вычтем 1:

$k + 1 - 1 - x_1x_2 + x_1 + x_2 = k + 1 + x_1(1 - x_2) - (1 - x_2) = k + 1 + (1 - x_2)(x_1 - 1)$. Поскольку $(1 - x_2)(x_1 - 1) > 0$, имеем $k + 1 + (1 - x_2)(x_1 - 1) > k + 1$. Таким образом, во втором случае получаем $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} > k + 1$.

Объединяя оба случая, получаем, что сумма любых $k + 1$ положительных чисел, произведение которых равно 1, *больше или равна* $k + 1$.

Таким образом исходное утверждение доказано.

П. 8

141. 1) а) Найдём критические точки функции.

$y' = ((2x - a)^6 (x + a)^4)' = 12(2x - a)^5 (x + a)^4 + 4(2x - a)^6 \times$ $\times (x + a)^3 = 4(2x - a)^5 (x + a)^3 (3(x + a) + 2x - a) = 4(2x - a)^5 \times$ $\times (x + a)^3 (5x + 2a)$. $y' = 0$ при $x_1 = -a$, $x_2 = -0{,}4a$, $x_3 = 0{,}5a$. При переходе через точки x_1 и x_3 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», значит, эти точки — точки минимума. Имеем: $2 = -a$ или $2 = 0{,}5a$. $a = -2$, $a = 4$.

2) в) Найдём критические точки функции.

$y' = ((2x - a)^3 (x + a)^4)' = 6(2x - a)^2 (x + a)^4 + 4(2x - a)^3 \times$ $\times (x + a)^3 = (2x - a)^2 (x + a)^3 (6(x + a) + 4(2x - a)) = 2(2x - a)^2 \times$ $\times (x + a)^3 (7x + a)$. $y' = 0$ при $x_1 = -a$, $x_2 = -\frac{1}{7}a$, $x_3 = 0{,}5a$. Если $x_1 = 2$, то $a = -2$ и $x_3 < x_2 < x_1$. При переходе через точку 2 производная изменяет знак с «минуса» на «плюс», значит, 2 — точка минимума. Если $x_2 = 2$, то $a = -14$ и $x_1 < x_3 < x_2$. При переходе через точку 2 производная изменяет знак с «плюса» на «минус», значит, 2 — точка максимума. Если $x_3 = 2$, то $a = 4$ и $x_1 < x_2 < x_3$. При переходе через точку 2 производная изменяет знак с «минуса» на «плюс», значит, и в этом случае 2 — точка минимума. 2 является точкой максимума при $a = -14$.

143. 1) Функция дифференцируема на R. Промежутки возрастания и убывания данной функции, а значит, и её точки экстремума совпадают с промежутками возрастания, убывания и точками экстремума функции $g = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 2$. Найдём критические точки функции g: $g' = 6x^2 - 6x - 12$; $g' = 0$: $x^2 - x - 2 = 0$, $x = -1$, $x = 2$. При переходе через точку -1 g' меняет знак с «плюса» на «минус», а при переходе через точку 2 — с «минуса» на «плюс». Значит, -1 — точка максимума, а 2 — точка минимума функций g и y. $y_{\max} = 5^5$, $y_{\min} = -22^5$; 2) функция дифференцируема при всех $x \neq -1$. Найдём её критические точки: $y' = -\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{2(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$, $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = -3$. При переходе через точку -3 производная меняет знак с «плюса» на «минус», а при переходе через точку 1 — с «минуса» на «плюс». Значит, -3 — точка максимума, а 1 — точка минимума данной функции. $y_{max} = -2{,}5$; $y_{min} = 1{,}5$.

144. Решение 1. Выразим угловой коэффициент k касательной через координаты точек касания: $y = x^2$; $y' = 2x$, $k = 2x_1$; $y = 3 - 2(x-6)^2$, $y' = -4(x-6)$, $k = -4(x_2 - 6)$; $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$

$= \dfrac{3 - 2(x_2-6)^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$. Имеем $\begin{cases} 2x_1 = -4(x_2 - 6), \\ -4(x_2 - 6) = \dfrac{3 - 2(x_2-6)^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = -2(x_2 - 6), \\ -4(x_2 - 6) = \dfrac{3 - 2(x_2-6)^2 - 4(x_2-6)^2}{x_2 + 2(x_2 - 6)}. \end{cases}$ Из второго уравнения

находим x_2: $-4(x_2 - 6)(3x_2 - 12) = 3 - 6(x_2 - 6)^2$,

$$2x_2^2 - 16x_2 + 25 = 0,\ x_2 = 4 \pm 0{,}5\sqrt{14}.$$

$$k = -4(4 \pm 0{,}5\sqrt{14} - 6) = -4(-2 \pm 0{,}5\sqrt{14}) = 8 \pm 2\sqrt{14}.$$

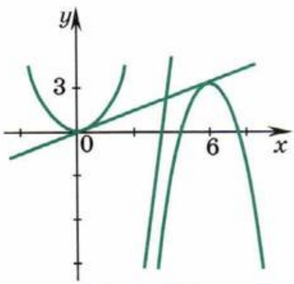


Рис. 141

Решение 2. Соответствующие параболы гомотетичны с коэффициентом гомотетии, равным -2, центр гомотетии A делит отрезок, соединяющий вершины парабол, точки (0; 0) и (6; 3), в отношении $2 : 1$ и имеет координаты (4; 2). Обе общие касательные к параболам проходят через их центр гомотетии (рис. 141). Выразим угловой коэффициент касательной двумя способами:

$k = 2x$ и $k = \dfrac{x^2 - 2}{x - 4}$. Отсюда: $2x = \dfrac{x^2 - 2}{x - 4}$, $2x^2 - 8x = x^2 - 2$,

$x^2 - 8x + 2 = 0$, $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{14}$, $k = 8 \pm 2\sqrt{14}$.

Решение 3. Пусть уравнение касательной $y = kx + b$, тогда дискриминанты уравнений $x^2 = kx + b$ и $3 - 2(x-6)^2 = kx + b$ должны быть одновременно равны нулю. Имеем

$$x^2 - kx - b = 0 \text{ и } 2x^2 + (k - 24)x + b + 69 = 0,$$

$\begin{cases} k^2 + 4b = 0, \\ (k-24)^2 - 4 \cdot 2(b + 69) = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} -4b = k^2, \\ (k-24)^2 + 2k^2 - 552 = 0, \end{cases}$

$$3k^2 - 48k + 576 - 552 = 0,\ k^2 - 16k + 8 = 0,\ k_{1,2} = 8 \pm 2\sqrt{14}.$$

145. 3) Возьмём производные от обеих частей равенства: $3y^2y' - y'x - y = 0$. Подставим координаты точки A:

$$3(-2)^2y' - y'(-1) + 2 = 0. \text{ Отсюда } y' = -\frac{2}{13}.$$

146. 5) Найдём y': $y'(x^2 - 2yx) + y(2x - 2y'x - 2y) = 0$, $y'(3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 3 - 2y' \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 0$, $y' = \frac{4}{3}$. Запишем уравнение касательной: $y = \frac{4}{3}(x - 3) + 1$, $y = \frac{4}{3}x - 3$; 6) найдём y', а именно $3x^2y + x^3y' - y^2 - 2xyy' = 0$, $3 \cdot 4 + 8y' - 1 - 2 \cdot 2y' = 0$, $y' = -\frac{11}{4}$. Запишем уравнение касательной

$$y = -\frac{11}{4}(x - 2) + 1, \ y = -\frac{11}{4}x + \frac{13}{2}.$$

147. Данная функция определена при $x \geqslant 3$. Её производная $y' = (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3})' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} - \frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+5}}{2\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+5}} < 0$ при $x > 3$. В силу непрерывности функция убывает на всей своей области определения.

При $x = 4$ равенство $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$ верно. Левая часть равенства задаёт убывающую функцию, значит, других корней, кроме числа 4, у уравнения нет. Ответ: $x = 4$.

П. 9

149. 1) а) Из того, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, следует, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{7x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{7x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{3\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\sqrt{2} \cdot \frac{|\sin x|}{x}\right) = -\sqrt{2}$;

2) г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin 9x}{9x} \cdot \frac{3x \cdot 3\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{9x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot 3 = 3.$

3) б) Сделав замену $\frac{1}{x} = y$, получим нужный предел;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/m}\right)^{\frac{x}{m}\cdot m} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x/m}\right)^{\frac{x}{m}}\right)^m = e^m.$

154. 2) Найдём производную $y' = \left(\frac{x^2}{2^x}\right)' = \frac{2x\cdot 2^x - x^2 2^x \ln 2}{2^{2x}} =$ $= \frac{x\cdot 2^x(2 - x\ln 2)}{2^{2x}}$. $y' = 0$ при $x = 0$ — точка минимума и при $x = \frac{2}{\ln 2}$ — точка максимума. Функция возрастает на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, убывает на $(-\infty; 0]$ и на $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$; 3) функция определена при всех значениях x, кроме нуля. $y' = (x^2 - \ln x^2)' = 2x - \frac{2x}{x^2} =$ $= \frac{2(x^2-1)}{x}$. Функция имеет минимумы в точках $x = -1$ и $x = 1$. Промежутки убывания: $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$, промежутки возрастания $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$.

155. Исследуем функцию $y = \log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ на монотонность: $y' = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$.
В числителе дроби — разность значений функции $q = z\ln z$ при $z = x$ и $z = x+1$. При $z > \frac{1}{e}$ производная этой функции положительна, значит, функция возрастает. Отсюда следует, что разность в числителе при $x > \frac{1}{e}$ отрицательна. Если же $x \in \left(0; \frac{1}{e}\right)$, то $x + 1 > 1$ и $x\ln x < 0$, $(x+1)\ln(x+1) > 0$, а значит, разность в числителе снова отрицательна. Следовательно, значения производной функции $y = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ при $0 < x < 1$ и при $x > 1$ отрицательны. Значит, функция на промежутках $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ убывает.

1) Данные числа — значения функции $y = \log_x(x+1)$ соответственно при $x = 9$ и при $x = 10$ и в силу убывания

этой функции $\log_9 10 > \log_{10} 11$; 2) $\frac{\ln \log_2 x}{\ln (6-x)} = \frac{\ln (\log_2 x + 1)}{\ln (7-x)}$, $\frac{\ln ((6-x)+1)}{\ln (6-x)} = \frac{\ln (\log_2 x + 1)}{\ln \log_2 x}$. Функция $f(t) = \log_t (t+1)$ убывает на $(0; 1)$, где её значения отрицательны, и на $(1; +\infty)$, где её значения положительны. Значит, каждое своё значение эта функция принимает по одному разу. Следовательно, $\log_{6-x} ((6-x)+1) = \log_{\log_2 x} (\log_2 x + 1) \Rightarrow 6 - x = \log_2 x$, откуда в силу разноимённой монотонности частей равенства имеем единственный корень: $x = 4$. Проверкой убеждаемся в его пригодности.

161. 2) $y' = (x - \cos x)' = 1 + \sin x$. Во всех точках, кроме $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, производная непрерывной функции положительна, а в указанных точках она равна нулю. Значение функции в любой из этих точек больше, чем её значения слева, и меньше, чем её значения справа. Значит, эту точку можно присоединить и к левому, и к правому по отношению к ней промежуткам возрастания (где $y' > 0$). Тем самым эти промежутки «склеятся».

166. 4) $y' = 10(x+1)^9 e^{-x} - (x+1)^{10} e^{-x} = (x+1)^9 e^{-x} (9 - x)$. При переходе через точку $x = 9$ производная непрерывной функции изменяет свой знак с «плюса» на «минус», значит, в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с «минуса» на «плюс», значит, в этой точке у функции минимум.

168. 6) Функция $y = \log_{0,5} (2x^2 - 3x - 2)$ определена на $(-\infty; -0,5) \cup (2; +\infty)$. Своё наименьшее значение внутренняя функция принимает при $x = 0,75$, при $x \leqslant 0,75$ она убывает, а при $x \geqslant 0,75$ она возрастает. В силу убывания внешней функции с учётом области определения получаем, что данная функция возрастает на $(-\infty; -0,5)$, а убывает на $(2; +\infty)$.

176. 1) а) При $x = 0$ значения обеих частей неравенства $e^x \geqslant 1 + x$ совпадают. При положительных значениях x производная левой части неравенства больше производной её правой части: $e^x > 1$, значит, значение левой части растёт быстрее, чем правой, и при любом положительном значении x будет строго больше. Таким образом, при всех неотрицательных значениях x данное неравенство верно; б) при $x = 0$

значения обеих частей неравенства $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ совпадают. Сравним производные от обеих частей неравенства при $x > 0$: $e^x > 1 + x$ (по доказанному в задании а). Значение левой части исходного неравенства растёт быстрее, чем правой, и при любом положительном значении x будет строго больше. Таким образом, при всех неотрицательных значениях x данное неравенство верно. 2) В левой части у всех неравенств стоит e^x, а производная правой части каждого следующего неравенства равна правой части предшествующего. Следующее неравенство будет таким: $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, и вообще $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

177. Рассмотрим функции $y = \ln(x+1)$ и $g = \frac{2x}{2+x}$ при $x \geqslant 0$. На указанном множестве данные функции непрерывны и дифференцируемы. Сравним производные функций y и g при $x > 0$: $(\ln(x+1))' - \left(\frac{2x}{2+x}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{2(2+x) - 2x}{(2+x)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{4 + 4x + x^2 - 4x - 4}{(x+1)(2+x)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(2+x)^2}$. Поскольку производная функции y больше производной g, то функция y возрастает быстрее. Поскольку $y(0) = g(0)$, то при положительных значениях x имеем $y > g$, т. е. $\ln(x+1) > \frac{2x}{2+x}$, что и требовалось доказать.

178. 2) Найдём угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x_0: $k = -\frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}}$. Запишем уравнение касательной в этой точке: $y - \sqrt{1-2x_0^2} = -\frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}}(x - x_0)$. Найдём отрезки, которые касательная отсекает от координатных лучей. При $x = 0$: $y = \frac{2x_0^2}{\sqrt{1-2x_0^2}} + \sqrt{1-2x_0^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2x_0^2}}$; при $y = 0$: $\sqrt{1-2x_0^2} = \frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}}(x - x_0)$, $1 - 2x_0^2 = 2x_0x - 2x_0^2$,

$x = \frac{1}{2x_0}$. Полупроизведение найденных отрезков даёт площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2x_0^2}} \cdot \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$8(1-2x_0^2)\,x_0^2 = 1,\ 16x_0^4 - 8x_0^2 + 1 = 0,\ (4x_0^2-1)^2 = 0,$$

$$x_0^2 = \frac{1}{4},\ x_0 = \pm 0{,}5.\ y_0 = \sqrt{1-2x_0^2} = \sqrt{1-0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k = -\frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}} = \mp\sqrt{2}.$$

Уравнения искомых касательных $y = \sqrt{2}\,(x + 0{,}5) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y = -\sqrt{2}\,(x - 0{,}5) + \frac{\sqrt{2}}{2}$. После упрощений получаем $y = \sqrt{2}\,(x+1)$ и $y = -\sqrt{2}\,(x-1)$.

179. Угловой коэффициент искомых касательных должен быть равен -1. Найдём абсциссы точек графика, касательные в которых имеют угловой коэффициент -1: $x^2 - 4x - 22 = -1$, $x^2 - 4x - 21 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 7$. Касательная проходит через I, II и IV четверти. В I четверти координаты x и y любой её точки положительны, во II четверти $y > |x|$, а в IV четверти $x > |y|$. Найдём ординаты точек касания: $y_1 = 11$ — II четверть ($y_1 > |x_1|$); $y_2 < -100$ — IV четверть ($x_2 < |y_2|$). Требованию задачи удовлетворяет только первая точка $(-3;\ 11)$.

185. 2) В любой окрестности точки $x = 0$ имеются интервалы, на которых производная $y' = 1 + 2x\sin\frac{5}{x} - 5\cos\frac{5}{x}$ положительна и интервалы, на которых производная отрицательна, т. е. интервалы возрастания и убывания функции, значит, функция y в окрестности точки $x = 0$ не является монотонной.

П. 10

189. Исследуем данную функцию. $D(y) = R$. Ось абсцисс — горизонтальная асимптота её графика. Найдём промежутки монотонности и экстремумы:

x	$(-\infty; -\sqrt{6}-1)$	$-\sqrt{6}-1$	$(-\sqrt{6}-1;\ \sqrt{6}-1)$	$\sqrt{6}-1$	$(\sqrt{6}-1; +\infty)$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

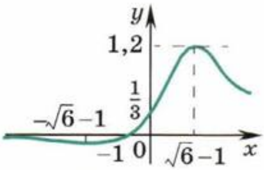


Рис. 142

В точке $x = -\sqrt{6} - 1$ функция имеет минимум, значение которого меньше нуля. В точке $x = \sqrt{6} - 1$ функция имеет максимум. Максимум данной функции является её наибольшим значением (рис. 142). Найдём максимум функции:

$$y_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{6 - 2\sqrt{6} + 1 - 2\sqrt{6} + 2 + 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{12 - 4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4(3 - \sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{6} + 6}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6} + 2}{4} < \frac{2{,}5 + 2}{4} < 1{,}2.$$

Все значения функции меньше, чем 1,3, значит, данное уравнение не имеет решений, и прямая $y = 1{,}3$ не пересекает график функции $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 3}$.

З а м е ч а н и е. Можно рассмотреть уравнение $\dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 3} = 1{,}3$, освободиться от знаменателя и получить квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом.

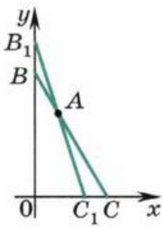


Рис. 143

195. Пусть прямая BC отсекает от угла треугольник наименьшей площади (рис. 143). Предположим, что $AC > AB$. Повернём эту прямую вокруг точки A на небольшой угол так, чтобы всё ещё выполнялось неравенство $AC_1 > AB_1$. Заметим, что $S_{BOC} + S_{BAB_1} - S_{CAC_1} = S_{B_1OC_1}$. В силу соотношения сторон, заключающих равные вертикальные углы в треугольниках BAB_1 и CAC_1: $S_{BAB_1} - S_{CAC_1} < 0$. Отсюда $S_{BOC} > S_{B_1OC_1}$, что противоречит минимальности площади треугольника BOC. К этому противоречию нас привело предположение о том, что точка A делит отрезок BC на неравные части. Значит, точка A должна быть серединой отрезка BC. Это позволяет найти координаты точек B и C: $B(0; 6)$, $C(4; 0)$ и записать уравнение прямой BC: $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, $y = -1{,}5x + 6$.

201. Обозначим основание прямоугольника буквой x, а его высоту — h. Сделаем рисунок (рис. 144). $h = \dfrac{24 - x}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Выразим площадь S прямоугольника как функцию x:

$$S = x \cdot \frac{24 - x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(24x - x^2).$$

Наибольшее значение S принимает при $x = 12$. Отсюда $h = 3\sqrt{3}$. Стороны искомого прямоугольника 12 см и $3\sqrt{3}$ см.

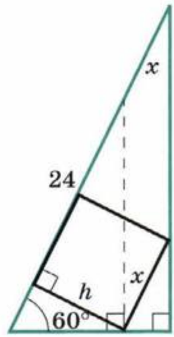


Рис. 144

204. Площадь треугольника $S = 0{,}5ab\sin\alpha$ со сторонами $a \leqslant 4$, $b \leqslant 5$ будет наибольшей, когда стороны равны 4 и 5, а угол между ними прямой. В этом случае третья сторона треугольника $c = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} < 7$, что удовлетворяет условию. Искомая площадь 10.

205. Обозначим радиус основания цилиндра буквой x, а его высоту — h. Тогда $\frac{h}{R - x} = \frac{H}{R}$, $h = \frac{H(R - x)}{R}$. Выразим площадь боковой поверхности цилиндра S как функцию x: $S = 2\pi x\frac{H(R - x)}{R} = \frac{2\pi H}{R}(Rx - x^2)$. Наибольшее значение S принимает при $x = 0{,}5R$. При этом значении x высота цилиндра $h = 0{,}5H$.

206. Обозначим буквой x угол (рис. 145), под которым из центра шара виден радиус цилиндра, и выразим объём цилиндра V как функцию x, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

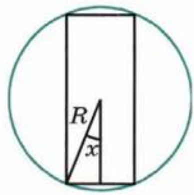


Рис. 145

$$V = \pi(R\sin x)^2 \cdot 2R\cos x = 2\pi R^3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Найдём наибольшее значение V на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. $V' = 2\pi R^3 \cdot (\sin^2 x\cos x)' =$

$= 2\pi R^3 \cdot (2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x) =$
$= 2\pi R^3\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x) =$
$= 2\pi R^3\sin x(3\cos^2 x - 1).$

На указанном интервале имеется единственный нуль производной, когда $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. В этой точке функция V имеет максимум, который в силу непрерывности функции совпадает с её наибольшим значением. Заметив, что при этом $\sin^2 x = \frac{2}{3}$ и $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, найдём радиус основания цилиндра: $R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

207. 1) В указанном промежутке находится один из корней трёхчлена $x^2 + 2x - 3$, равный 1. Вершина соответствующей параболы имеет абсциссу $x_0 = -1$. Рассмотрим два отрезка: $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и $[1; 4]$. На первом из них имеем $y = -x^2 - 2x + 3 + \frac{3}{2}\ln x$, $y' = -2x - 2 + \frac{3}{2x}$. $y' = 0$: $-2x - 2 + \frac{3}{2x} = 0$, $4x^2 + 4x - 3 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -1{,}5$. На $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ функция убывает, её наибольшее значение равно $1{,}75 + 1{,}5\ln 0{,}5$, а наименьшее — 0. На промежутке $[1; 4]$ имеем $y = (x^2 + 2x - 3) + \left(\frac{3}{2}\ln x\right)$, оба слагаемых возрастают, значит, возрастает и функция y. Наибольшее значение функции на этом промежутке $21 + 3\ln 2$ явно больше, чем её наибольшее значение на ранее рассмотренном промежутке, а наименьшие значения на этих промежутках совпадают. Значит, наибольшее значение на $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ равно $21 + 3\ln 2$, а наименьшее — 0.

208. 1) Нужно сравнить $\frac{1}{e}\ln e$ и $\frac{1}{\pi}\ln \pi$. Найдём точку экстремума функции $y = \frac{1}{x}\ln x$. $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' = 0$ при $x = e$. На промежутке $[e; +\infty)$ функция убывает. Поскольку $e < \pi$, имеем $\frac{1}{e}\ln e > \frac{1}{\pi}\ln \pi$. Значит, $e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$.

209. 1) Р е ш е н и е 1. Наименьшее расстояние от параболы до прямой измеряется от точки, в которой касательная к параболе параллельна прямой (рис. 146).

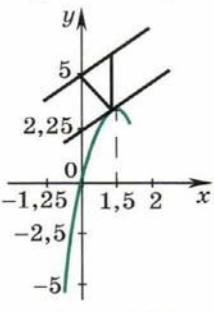


Рис. 146

$$(4x - x^2)' = 1.$$

$$4 - 2x = 1,\ x = 1{,}5.$$

Искомое расстояние — длина катета, изображённого на рисунке равнобедренного прямоугольного треугольника. Гипотенуза его равна разности ординат точек прямой и параболы с абсциссой 1,5: $1{,}5 + 5 - (4 \cdot 1{,}5 - 1{,}5^2) = 2{,}75$. Катет этого треугольника найдём умножением на $\cos 45°$: $\frac{2{,}75\sqrt{2}}{2}$.

Р е ш е н и е 2. Можно заметить, что ближайшая к прямой точка параболы является концом наименьшего из параллельных оси ординат отрезков, соединяющих эти две линии. Длину l этого отрезка легко выразить, как разность ординат соответствующих точек: $l = x + 5 - 4x + x^2 = x^2 - 3x + 5$. Наименьшее значение достигается при $x = 1{,}5$: $\min l = 2{,}75$. Остаётся умножить найденное расстояние на $\cos 45°$.

2) Достаточно рассмотреть $x > 0$. В правой полуплоскости графики симметричны относительно прямой $y = x$. Кратчайший отрезок, соединяющий их точки, перпендикулярен этой прямой, а касательные, проведённые через его концы, имеют угловые коэффициенты, равные 1. $(x^2 + 1)' = 1$, $2x = 1$, $x = 0{,}5$. В силу упомянутой симметрии другой конец отрезка имеет координаты $(1{,}25; 0{,}5)$.

Проекция искомого отрезка на ось x равна $0{,}75$, а сам отрезок как гипотенуза соответствующего равнобедренного треугольника равен $0{,}75\sqrt{2}$.

3) Графики данных функций симметричны относительно прямой $y = x$, значит, кратчайший соединяющий их отрезок перпендикулярен указанной прямой (рис. 147). Касательные, проведённые к графикам в концах этого отрезка, параллельны прямой $y = x$. Мы определяли число e так, чтобы касательная к графику функции $y = e^x$ в точке $(0; 1)$ имела угловой коэффициент 1. Следовательно, один из концов отрезка имеет координаты $(0; 1)$. Поскольку отрезок, соединяющий графики, симметричен относительно прямой $y = x$, координаты другого его конца: $x = 1$, $y = 0$. По формуле расстояния между точками имеем: $\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$. О т в е т: $\sqrt{2}$.

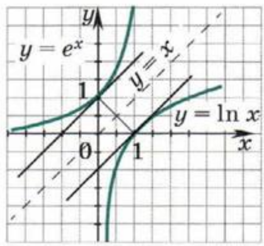


Рис. 147

210. $a_6 = a_1 + 5d = 3$, откуда $a_1 = 3 - 5d$. Обозначим произведение $a_1a_4a_5$ через y. Тогда получим

$$y = a_1 \cdot (a_1 + 3d)(a_1 + 4d) = -10d^3 + 51d^2 - 72d + 27;$$
$$y' = -30d^2 + 102d - 72 = -6 \cdot (5d^2 - 17d + 12).$$

$y' = 0$: $d_1 = 1$, $d_2 = 2{,}4$. Так как по условию $d > 1$, будем исследовать функцию на интервале $(1; +\infty)$. Функция достигает наибольшего значения при $d = 2{,}4$.

216. Банка состоит из оснований радиусом R и боковой стенки высотой h: $S = 2\pi R(R + h)$. Отсюда $h = \dfrac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}$.

Объём банки $V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot \dfrac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = 0{,}5(SR - 2\pi R^3)$. Найдём наибольшее значение V: $V' = 0{,}5(S - 6\pi R^2)$. При $R > 0$ единственный экстремум — максимум, непрерывная функция V имеет при $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. Этот максимум является наибольшим значением V.

Высота соответствующей банки равна $\dfrac{S - 2\pi \dfrac{S}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

П. 11

225. 3) Исследуем данную функцию на монотонность и выпуклость, учитывая, что она определена на R. $y' = -2xe^{-x^2}$. $y' = 0$ при $x = 0$. Вторая производная $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$ в этой точке отрицательна, значит, в ней функция имеет максимум.

Вторая производная меняет знак при переходе через точки $x = \pm\sqrt{0{,}5}$ — точки перегиба. На промежутке $(-\sqrt{0{,}5}; +\sqrt{0{,}5})$ значения второй производной отрицательны, следовательно, функция выпуклая, а на промежутках $(-\infty; -\sqrt{0{,}5})$ и $(\sqrt{0{,}5}; +\infty)$ функция вогнутая. Все значения функции положительны, причём $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$, т. е. ось абсцисс — горизонтальная асимптота графика. Ордината точки перегиба равна $e^{-0{,}5} \approx 0{,}6$. Максимум функции 1.

226. 2) Исследуем на выпуклость функцию

$y = x^{\frac{1}{2014}}$. $y' = \dfrac{1}{2014} x^{-\frac{2013}{2014}}$, $y'' = -\dfrac{2013}{2014^2} x^{-1\frac{2013}{2014}}$.

На всей области определения второй производной она отрицательна, значит, функция выпуклая. У выпуклой функции среднее арифметическое значений функции меньше, чем значение функции от среднего арифметического соответствующих значений аргумента. Значит, $\dfrac{\sqrt[2014]{0{,}3} + \sqrt[2014]{0{,}7}}{2} < \sqrt[2014]{0{,}5}$.

229. 1) Данная функция дифференцируема. Найдём её критические точки: $y' = 2\ln x + 2 - \ln 49$; $y' = 0$: $2\ln x + 2 -$

$-\ln 49 = 0,\ 2\ln x = 2\ln 7 - 2,\ \ln x = \ln 7 - 1,\ x = \frac{7}{e},\ \frac{7}{e} \in [1;\ 4].$

Найдём знак второй производной в критической точке: $y'' = \frac{2}{x}$.

При $x = \frac{7}{e}$ $y'' > 0$. Значит, $\frac{7}{e}$ — точка минимума. Поскольку $\frac{7}{e}$ — единственная критическая точка, в ней функция принимает своё наименьшее значение:

$$\min_{[1;\ 4]} y = 2 \cdot \frac{7}{e} \ln \frac{7}{e} - \frac{7}{e} \ln 49 = \frac{14}{e}\left(\ln \frac{7}{e} - \ln 7\right) = -\frac{14}{e}.$$

2) На указанном отрезке функция дифференцируема. Найдём на нём её критические точки: $y' = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2} - \ln 2$;

$y' = 0$: $\frac{1}{2}\ln x = \ln 2 - \frac{1}{2}$, $\ln x = \ln 4 - 1$, $x = \frac{4}{e}$, $0{,}5 < \frac{4}{e} < 2$. Найдём знак второй производной в критической точке: $y'' = \frac{1}{2x}$.

При $x = \frac{4}{e}$ $y'' > 0$. Значит, $\frac{4}{e}$ — точка минимума. Поскольку это единственная критическая точка, в ней функция принимает своё наименьшее значение:

$$\min_{[0{,}5;\ 2]} y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{e} \ln \frac{4}{e} - \frac{4}{e} \ln 2 = \frac{4}{e}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{4}{e} - \ln 2\right) = \frac{2}{e}\left(\ln \frac{4}{e} - \ln 4\right) = -\frac{2}{e}.$$

230. При $x = 0$ первая производная данной функции имеет разрыв, значит, в этой точке вторая производная не существует.

Глава 4

Интеграл и первообразная

П. 12

246. Рассмотрим фигуру (рис. 148), составленную из прямоугольников, основание каждого из которых Δx, а высота — разность значений «верхней» и «нижней» функций в точках $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $x_n = b$. При $n \to +\infty$ получаем:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} ((f(x_0) - g(x_0))\,\Delta x + (f(x_1) - g(x_1))\Delta x + \ldots + (f(x_n) - g(x_n))\,\Delta x) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

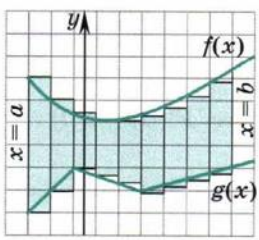


Рис. 148

252. 2) б) Заменим функции, графики которых ограничивают фигуру, на обратные им: $y = x^2$ и $y = \sqrt{8x}$.

$V = \int\limits_0^2 8\pi x dx - \int\limits_0^2 \pi x^4 dx$. Можно также использовать формулу объёма тела вращения вокруг оси Oy: $V = \int\limits_a^b \pi g^2(y) dy$.

253. Площадь прямоугольника шириной Δx, отстоящего от поверхности воды на x, равна $\frac{a(h-x)}{h}\Delta x$. Давление на глубине x складывается из атмосферного давления P_0 и давления воды P_x. Считая атмосферное давление одинаковым по всей высоте плотины, а давление столба воды высотой x: $P_x = \rho g x$, где ρ — плотность воды, находим силу давления воды на прямоугольник: $(P_0 + P_x) \cdot \frac{a(h-x)}{h}\Delta x$ — слагаемое интегральной суммы. При $\Delta x \to 0$ интегральная сумма стремится к $\int\limits_0^h (P_0 + \rho g x) \cdot \frac{a(h-x)}{h} dx$ — это и есть сила давления воды на плотину.

254. Площадь основания параллелепипеда высотой Δx, отстоящего от вершины пирамиды на x, равна $\frac{S}{H^2}x^2$, а его объём $\frac{S}{H^2}x^2\Delta x$ — это слагаемое интегральной суммы. Объём пирамиды находим как интеграл $\int\limits_0^H \frac{S}{H^2}x^2 dx$.

П. 13

257. Секущая к графику $F(x)$ при $x \to 0$ заключена между секущими к графикам функций $y = x - x^2$ и $y = x + x^2$ и имеет поэтому своим предельным положением прямую $y = x$. Значит, $F'(0) = f(0) = 1$. $F'(x) = f(x) = 1 + 2x\sin\frac{5}{x} + x^2\cos\frac{5}{x} \cdot \left(-\frac{5}{x^2}\right) =$

$= 1 - 5\cos\frac{5}{x} + 2x\sin\frac{5}{x}$, при $x \neq 0$. При $x \to 0$ третье слагаемое стремится к нулю, и сумма первого и второго бесконечно колеблется между -4 и 6, т. е. не стремится ни к какому числу. Значит, $x = 0$ — точка разрыва функции $f(x)$.

260. 6) Поскольку абсцисса точки A равна $\frac{\pi}{12}$, будем искать первообразную на том промежутке её области определения, который содержит это число, т. е. на интервале $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$. На нём любая из первообразных задаётся формулой $F(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$. Подставив в это равенство координаты точки A, найдём значение C: $-1 = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + C$, $C = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.

Искомая первообразная: $F(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x - \frac{2}{3}$, где $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

262. 4) Преобразуем дробь:

$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \text{ (рис. 149).}$$

$$S = \int_1^2 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_1^2 (x-1)dx + \int_1^2 \frac{dx}{1+x} = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right)\Big|_1^2 =$$
$$= 2 - 2 + \ln 3 - 0{,}5 + 1 - \ln 2 = 0{,}5 + \ln 1{,}5.$$

5) $$S = \int_{-2}^{0}(x^2 + 4x + 5)dx + \int_0^4 (x^2 - 4x + 5)dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)\Big|_0^4 =$$
$$= \frac{8}{3} - 8 + 10 + \frac{64}{3} - 32 + 20 = 14 \text{ (рис. 150).}$$

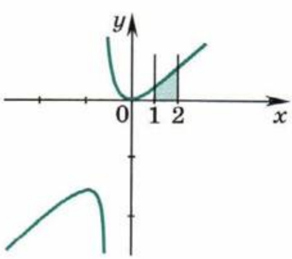


Рис. 149

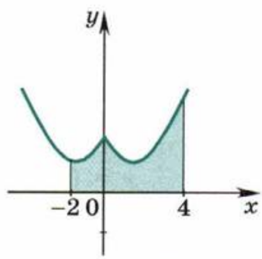


Рис. 150

268. Производная существует при всех $x \neq 0$. Понятно, что при этих значениях x существует $f(x)$. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ может не существовать, однако возможно, что и в этой точке функция существует, просто у неё в ней нет производной. На промежутке $(-\infty; 0)$ $f(x) = \frac{1}{x} + 5$ (см. пример 1).

На промежутке $(0; +\infty)$ $f(x) = \dfrac{1}{x} + C$. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой любой из данных функций, значит, в нуле функция может или не быть определена, или принимать любое значение: $f(x) = \begin{cases} x^{-1} + 5 \text{ при } x < 0, \\ x^{-1} + C \text{ при } x > 0 \end{cases}$ или

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} + 5 \text{ при } x < 0, \\ C_1 \text{ при } x = 0, \\ x^{-1} + C_2 \text{ при } x > 0, \end{cases}$$ где C, C_1 и C_2 любые числа.

271. 1) Одна парабола получается из другой сдвигом вдоль касательной (рис. 151), поэтому угловой коэффициент a касательной можно выразить через координаты вершин парабол $(-1; 5)$ и $(2; 8)$: $a = \dfrac{5-8}{-1-2} = 1$.

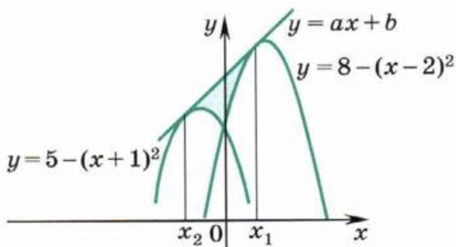


Рис. 151

С другой стороны, угловой коэффициент можно найти как производную функции $g(x) = = 8 - (x-2)^2$: $g'(x) = -2x + 4$, $a = -2x_1 + 4$. Имеем: $-2x_1 + 4 = 1$, $x_1 = 1{,}5$. $y_1 = 8 - (1{,}5 - 2)^2 = = 7{,}75$. Аналогично, $f'(x) = -2x - 2$, $-2x_2 - 2 = 1$, $x_2 = -1{,}5$, $y_2 = 5 - (-1{,}5 + 1)^2 = 4{,}75$.

Уравнение касательной: $y = x - 1{,}5 + 7{,}75$, $y = x + 6{,}25$. Найдём абсциссу точки пересечения парабол: $5 - (x+1)^2 = = 8 - (x-2)^2$, $x = 0$. Теперь искомую площадь можно найти как сумму интегралов:

$$S = \int_{-1,5}^{0} (x + 6{,}25 - 5 + (x+1)^2)dx + \int_{0}^{1,5} (x + 6{,}25 - 8 + (x-2)^2)dx =$$

$$= \int_{-1,5}^{0} (x^2 + 3x + 2{,}25)dx + \int_{0}^{1,5} (x^2 - 3x + 2{,}25)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 1{,}5x^2 + 2{,}25x\right)\Bigg|_{-1,5}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 + 2{,}25x\right)\Bigg|_{0}^{1,5} =$$

$$= \frac{9}{8} - \frac{27}{8} + \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{27}{8} + \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

2) Касательная имеет по одной общей точке с каждой из парабол. Найдём её, приравняв к нулю дискриминанты квадратных уравнений:

$$x^2 + 5x + 7 = ax + b \text{ и } x^2 - x - 5 = ax + b.$$

$x^2 + (5 - a)x + 7 - b = 0,$
$D = 25 - 10a + a^2 - 4(7 - b) = 0,$
$a^2 - 10a + 4b - 3 = 0;$
$x^2 - (1 + a)x - 5 - b = 0,$
$D = 1 + 2a + a^2 + 4(5 + b) = 0,$
$a^2 + 2a + 4b + 21 = 0.$

$\begin{cases} a^2 - 10a + 4b - 3 = 0, \\ a^2 + 2a + 4b + 21 = 0, \end{cases}$ $12a + 24 = 0$, $a = -2$. Подставим значение a во второе уравнение системы $4 - 4 + 4b + 21 = 0$, $b = -\frac{21}{4}$.

Уравнение касательной $y = -2x - \frac{21}{4}$.

Абсциссы точек касания найдём из уравнений, дискриминанты которых мы приравнивали к нулю:

$$x_1 = -\frac{5-a}{2} = -\frac{7}{2},\ x_2 = \frac{1+a}{2} = -\frac{1}{2}.$$

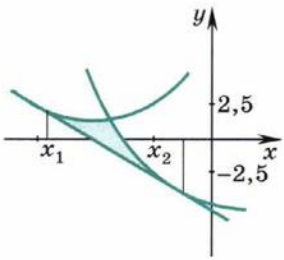


Рис. 152

Найдём абсциссу точки пересечения парабол: $x^2 + 5x + 7 = x^2 - x - 5$, $x = -2$ (рис. 152). Теперь мы можем найти искомую площадь как сумму интегралов:

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{-2}\left(x^2 + 5x + 7 + 2x + \frac{21}{4}\right)dx + \int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - 5 + 2x + \frac{21}{4}\right)dx =$$

$$= \int_{-\frac{7}{2}}^{-2}\left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right)dx + \int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 + \frac{49}{4}x\right)\Bigg|_{-\frac{7}{2}}^{-2} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{8}{3} + 14 - \frac{49}{2} + \frac{7^3}{2^3 \cdot 3} - \frac{7^3}{2^3} + \frac{49}{4} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3} +$$

$$+ \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{2} = 14 - \frac{49}{2} + \frac{343}{24} - \frac{1}{24} - 2 + \frac{1}{2} = 2{,}25.$$

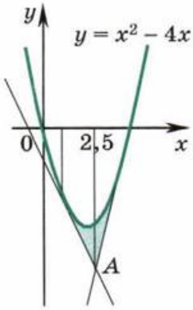


Рис. 153

272. 2) Уравнения касательных имеют вид $y = k\left(x - \frac{5}{2}\right) - 6$ (рис. 153). Найдём угловые коэффициенты касательных, приравнивая к нулю дискриминант уравнения

$$x^2 - 4x = k\left(x - \frac{5}{2}\right) - 6:$$

$$x^2 - (4 + k)x + \frac{5}{2}k + 6 = 0,$$
$$D = (4 + k)^2 - 10k - 24 = 0,$$
$$k^2 - 2k - 8 = 0,$$
$$k_{1,2} = 1 \pm 3,$$
$$k_1 = -2,\ k_2 = 4.$$

Абсциссы точек касания найдём из уравнения

$$x^2 - (4 + k)x + \frac{5}{2}k + 6 = 0,$$

подставляя в него найденные значения k:

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1;\ x_2 = \frac{4+4}{2} = 4.$$

Теперь найдём искомую площадь как сумму интегралов:

$$\int_1^{2,5}(x^2 - 4x + 2(x - 2,5) + 6)dx + \int_{2,5}^{4}(x^2 - 4x - 4(x - 2,5) + 6)dx =$$
$$= \int_1^{2,5}(x^2 - 2x + 1)dx + \int_{2,5}^{4}(x^2 - 8x + 16)dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Bigg|_1^{2,5} + \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_{2,5}^{4} =$$
$$= \frac{2,5^3}{3} - 2,5^2 + 2,5 - \frac{1}{3} + 1 - 1 + \frac{4^3}{3} - 4^3 + 4^3 - \frac{2,5^3}{3} +$$
$$+ 4 \cdot 2,5^2 - 16 \cdot 2,5 = 2,25.$$

274. Вблизи точек пересечения с прямой парабола сливается с касательными. С учётом этого задача становится совершенно аналогичной задаче 190 из п. 10 об отсечении треугольника наименьшей площади от угла. Если точка $A(0;\ 1)$ не является серединой отрезка секущей, заключённого внутри параболы, то секущую можно немного повернуть так, чтобы площадь отсекаемой фигуры уменьшилась, а значит, в этом случае площадь не минимальна. Таким образом, точка A должна быть серединой соответствующего отрезка (рис. 154).

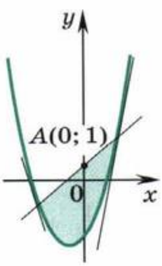


Рис. 154

Отсюда следует, что абсциссы точек пересечения должны быть противоположны. Значит, сумма корней соответствующего квадратного уравнения должна быть равна нулю.

$$x^2 + 2x - 3 = 1 + kx,\ x^2 - (k-2)x - 4 = 0.$$

При этом по теореме Виета $k - 2 = 0$, $k = 2$.

275. 2) При $a \in (0;\ 2]$ интеграл противоположен площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком подынтегральной функции и прямой $x = a$. Поэтому своё наименьшее значение на этом промежутке он принимает, когда эта площадь наибольшая, т. е. при $a = 2$. При увеличении a значение интеграла будет расти, значит, наибольшего значения нет. Найдём наименьшее значение интеграла:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

280. б) $I_{\text{ср}} = \dfrac{1}{\pi - 0}\displaystyle\int_0^{\pi} k \sin t\, dt = -\dfrac{k}{\pi}\cos t\Bigg|_0^{\pi} = \dfrac{2k}{\pi} \approx 0{,}64k.$

285. Выразим высоту H и радиус основания конуса r (рис. 155):

$$H = R + x,\ r = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Рис. 155

Объём конуса

$$V = \frac{\pi}{3}Hr^2 = \frac{1}{3}\pi\,(R + x)\cdot(R^2 - x^2),\ x \in [0;\ R).$$

$V' = 0$: при $x = \dfrac{R}{3}$ — единственная точка экстремума — максимум на $[0;\ R)$. В этой точке функция $V(x)$ принимает наибольшее значение. Радиус основания искомого конуса $r = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$, высота $H = \dfrac{4}{3}R$.

288. Длину уклона s — пройденный путь поезда — можно выразить как интеграл:

$$s = \int_0^{20}(15 + 0{,}2t)dt = \left(15t + \frac{t^2}{10}\right)\Bigg|_0^{20} = 300 + 40 = 340\ (\text{м}).$$

П. 16

302. 5) Разделим обе части неравенства на 2, получим: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Заменим $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ соответственно на $\cos\dfrac{\pi}{4}$ и $\sin\dfrac{\pi}{4}$: $\cos\dfrac{\pi}{4}\sin x - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$-\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z};$$

9) в неравенстве $\cos^2 x - \cos x < 0$ обозначим $\cos x = y$, тогда $y^2 - y < 0$, $0 < y < 1$. Имеем $0 < \cos x < 1$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n$ и $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

303. 2) Группируя первый множитель с последним, а второй с третьим, получим: $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120$. Обозначив $y = x^2 + 5x + 4$, получим уравнение относительно y: $y^2 + 2y - 120 = 0$, $y_1 = 10$, $y_2 = -12$. Возвращаемся к переменной x: 1) $x^2 + 5x + 4 = 10$, $x_1 = 1$, $x_2 = -6$; 2) $x^2 + 5x + 4 = -12$, $D < 0$, корней нет. О т в е т: 1 и –6.

5) Сгруппируем члены уравнения следующим образом:

$$\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6} - \frac{1}{x-1}; \quad \frac{5x-12}{(x-2)(x-3)} = \frac{5x-12}{(x+6)(x-1)}.$$

Перемножим крайние и средние члены пропорции и получим уравнение вида: $ab = ac$, которое распадается на два уравнения: 1) $5x - 12 = 0$, $x_1 = 2{,}4$; 2) $(x - 2)(x - 3) = (x + 6)(x - 1)$, $x_2 = 1{,}2$.

О т в е т: 1,2 и 2,4.

6) Раскладываем на множители: $3^{x^2}(35 - x) - 5^{2x}(35 - x) = 0$, $(35 - x)(3^{x^2} - 5^{2x}) = 0$. Приравниваем к нулю: 1) $x_1 = 35$; 2) $3^{x^2} = 5^{2x}$, $x^2 = 2x\log_3 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\log_3 5$.

О т в е т: 35; 0; $2\log_3 5$.

7) Группируем члены:

$(\cos 9x + \cos 3x) - (\cos 7x + \cos x) = 0$,

$2\cos 6x\cos 3x - 2\cos 4x\cos 3x = 0$,

$(\cos 6x - \cos 4x)\cos 3x = 0$,

$\sin 5x\sin x\cos 3x = 0$.

$x_1 = \frac{\pi}{5}n$, $x_2 = \pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Вторая серия входит в первую, поэтому её в ответе не записываем.

304. 1) Сделаем замену переменных: $t = 2^x$, $t > 0$ и получим новое уравнение $t^2 - 5t - 24 = 0$, $t_1 = -3$ (не удовлетворяет условию $t > 0$) и $t_2 = 8$. Возвращаемся к переменной x: $2^x = 8$, $x = 3$.

2) Перенесём 1 в левую часть и заменим её, используя основное тригонометрическое тождество, $\cos 2x$ и $\sin 2x$ выразим через $\cos x$ и $\sin x$. Получим после упрощения уравнение, однородное относительно $\cos x$ и $\sin x$: $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$. Разделим почленно на $\cos^2 x$ ($\cos^2 x \neq 0$) и сделаем замену переменных $y = \operatorname{tg} x$, получим: $3y^2 - 2y - 2 = 0$, $y = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Возвращаемся к переменной x:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

3) Сделаем замену переменных $y = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$, $y \geqslant 0$. Тогда $2x^2 - 6x = 2(y^2 - 6)$. Получаем уравнение относительно y: $2y^2 - 12 + y + 2 = 0$, $2y^2 + y - 10 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{5}{2}$ (не удовлетворяет условию $y \geqslant 0$). Возвращаемся к переменной x:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 2,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

5) Перейдём во всех логарифмах к основанию 2 и сделаем замену $y = \log_2 x$. Получим уравнение относительно y: $\frac{6}{y} + \frac{4}{2 + y} + \frac{6}{4 + y} = 0$. Корни этого уравнения -3 и -1. Перейдём к переменной x: $\log_2 x = -3$ и $\log_2 x = -1$. Ответ: $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$.

6) Сделаем замену $y = 3^x$ и получим уравнение $\sqrt{72y - 23} = 2 - 3y$. После возведения в квадрат и упрощения приходим к квадратному уравнению $3y^2 - 28y + 9 = 0$. Его корни $\frac{1}{3}$ и 9. Второй корень посторонний, так как $2 - 3y \geqslant 0$. Возвращаемся к переменной x и получим $3^x = 3^{-1}$, $x = -1$.

8) Введём новую переменную $t = \sqrt{x - 1}$, тогда $x = t^2 + 1$ и заданное уравнение принимает вид $\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1$, т. е. $|t - 2| + |t - 3| = 1$. Решением этого уравнения является $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Перейдём к переменной x: $\sqrt{x - 1} = 2$, $\sqrt{x - 1} = 3$. Ответ: 5 и 10.

9) Представим $\log_{3x} \frac{3}{x} = \log_{3x} 3 - \log_{3x} x = \frac{1}{1 + \log_3 x} - \frac{\log_3 x}{\log_3 x + 1} = \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x}$. Далее имеем: $\frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} = 1 - \log_3^2 x$, $1 - \log_3 x = (1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x)^2$. Рассмотрим два случая:

1) $1 - \log_3 x = 0$, тогда $x = 3$; 2) $1 - \log_3 x \neq 0$, тогда $(1 + \log_3 x)^2 = 1$, $\log_3 x = 0$ или $\log_3 x = -2$; $x = 1$ или $x = \frac{1}{9}$. Ответ: $\frac{1}{9}$; 1; 3.

10) Пусть $t = |x + 1|$, где $t \geqslant 0$. Получим уравнение $t^2 - 4 = 3t$. Единственный неотрицательный корень $t = 4$. Возвращаемся к x: $|x + 1| = 4$, $x_1 = 3$ и $x_2 = -5$.

305. 1) Функция $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^t$ убывающая, следовательно, $\frac{2 + x}{1 - x} < \frac{1}{2}$. Решаем данное неравенство методом интервалов и получаем ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

2) Введём новую переменную $t = 5^x$, $t > 0$. Исходное неравенство примет вид $5t^2 - t - 4 > 0$. С учётом $t > 0$ получаем $t > 1$. Следовательно, $5^x > 1$, $x > 0$.

3) Преобразуем и получим $2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} < 1$. Введём новую переменную $t = \log_5 x$. Исходное неравенство примет вид $2t - \frac{3}{t} - 1 < 0$. Решения данного неравенства $t < -1$ или $0 < t < \frac{3}{2}$. Возвращаемся к переменной x и находим

$$x \in \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (1; \sqrt{125}).$$

4) Так как $x > 0$, то $\log_{100} x^2 = \lg x$. Обозначив $\lg x$ через y, перепишем данное неравенство в виде $y^2 + y - 2 < 0$. Решениями этого квадратного неравенства служат все значения y из промежутка $-2 < y < 1$. Возвращаемся к x: $-2 < \lg x < 1$, $0{,}01 < x < 10$. Ответ: $0{,}01 < x < 10$.

306. 7) Подбором находим корень $x = 2$. Чтобы убедиться в единственности корня, разделим уравнение на 5^x и представим его в виде $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Левая часть уравнения задаёт убывающую функцию, которая своё значение 1 принимает только при $x = 2$.

8) Так как левая часть уравнения является возрастающей функцией, а правая — убывающей, то их графики не могут пересекаться более, чем в одной точке, т. е. данное уравнение имеет не более одного корня. Число -2 удовлетворяет уравнению, и, следовательно, является его единственным корнем. Ответ: -2.

9) Функция $y = x^5 + 4x$ является возрастающей, поэтому значение -40 может принять только при одном значении x,

равном -2. Следовательно, это единственный корень уравнения.

307. 1) Поскольку $\sin 5x \leqslant 1$, $-\cos 2x \leqslant 1$, то левая часть не превосходит 3 и равна 3, только если $\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$ Решим второе уравнение, а затем из найденных значений возьмём те, которые являются корнями первого: $\cos 2x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $5x = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$, $\sin 5x = \sin\left(\frac{5}{2}\pi + 5\pi k\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$ только при $k = 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Известно, что $\sin x \leqslant 1$, а значения квадратного трёхчлена, стоящего справа, при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ больше 1. Значит, при всех x из этого множества выполняется неравенство $\sin x < x^2 + x + 1$. На отрезке $[-1; 0]$ справедливы неравенства $x^2 + x + 1 > 0$ и $\sin x \leqslant 0$, так что и на этом отрезке уравнение корней не имеет.

3) Так как при любом значении переменной левая часть уравнения не больше двух, а правая — не меньше двух (как сумма взаимно-обратных положительных величин), то равенство возможно только тогда, когда одновременно $2\cos\frac{x}{3} = 2$ и $2^x + 2^{-x} = 2$. Система этих двух уравнений с одним неизвестным имеет единственное решение $x = 0$.

4) Поскольку при любом значении переменной левая часть уравнения не больше, а правая — не меньше единицы, то равенство возможно только тогда, когда одновременно $\sin\frac{\pi x}{2} = 1$ и $x^2 - 2x + 2 = 1$. Ответ: 1.

5) Заметим, что $3\sin x + 4\cos 3x \cos x \leqslant 3\sin x + |4\cos 3x \times \cos x| \leqslant 3\sin x + |4\cos x|$, причём равенство в последнем переходе будет только при $|\cos 3x| = 1$. Применяя формулу вспомогательного аргумента, получим, что $3\sin x + |4\cos x| \leqslant 5\sin\frac{\pi}{2} = 5$. Поскольку $2\sin 5x \leqslant 2$, равенство $3\sin x + 4\cos 3x\cos x + 2\sin 5x = 7$ может оказаться верным только при одновременном выполнении условий $|\cos 3x| = 1$ и $\sin 5x = 1$, что невозможно ни при каком x.

6) Рассмотрим левую часть уравнения как квадратный трёхчлен относительно $\cos x$ и найдём дискриминант этого

уравнения. $\frac{D}{4} = 4\cos^4 3x - 4\cos^2 3x = 4\cos^2 3x(\cos^2 3x - 1)$. Если x является корнем уравнения, то должно быть $D \geqslant 0$. Поскольку первый множитель неотрицателен, а второй неположителен, имеем: $\cos 3x = 0$ или $\cos 3x = \pm 1$. Если $\cos 3x = 0$, то из формулы корней получим $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — эти значения удовлетворяют уравнению. Если $\cos 3x = \pm 1$, то $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, значения также удовлетворяющие уравнению. Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

308. 1) Левая часть неравенства при всех x не больше 1, а правая — не меньше 1. Остаётся исключить значение x, при котором $\cos x = x^2 + 1$, т. е. $x = 0$. Ответ: $x \neq 0$;

2) для любого x имеем: $\cos x \leqslant 1 \leqslant 1 + |x|$;

3) $\cos x \leqslant 1 < 1 + 2^x$ для любого x, т. е. $\cos x < 1 + 2^x$. Значит, данное неравенство решений не имеет;

4) для любого x имеем $1 + \frac{1}{2 - \sin^2 x} \geqslant 1 + \frac{1}{2} > \cos x$;

5) $\arcsin \frac{2}{x} + \sqrt{x - 1} > 1$. ОДЗ неравенства: $x \geqslant 2$. При этих значениях $\arcsin \frac{2}{x} > 0$ и $\sqrt{x-1} \geqslant 1$, значит,

$$\arcsin \frac{2}{x} + \sqrt{x-1} > 1 \text{ при всех } x \geqslant 2;$$

6) ОДЗ неравенства $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$). При этих значениях x неравенство принимает вид: $0 < \frac{\pi}{2} + 2\pi n - 12{,}5\pi$, $6\pi < \pi n$, $n > 6$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n принимает все натуральные значения, большие 6.

309. 1) Сделаем замену переменных $y = 2x^2 + 3x$. При этом данное уравнение примет вид $y^2 - 7y + 10 = 0$. Решив это уравнение, получим $y_1 = 2$, $y_2 = 5$. Следовательно, множество решений данного уравнения есть объединение множеств решений уравнений $2x^2 + 3x - 2 = 0$ и $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Решив их, получаем $-2{,}5$; -2; $0{,}5$ и 1.

2) Введём обозначение $c = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$. Получим: $c^2 + c - 20 = 0$. Его корни $c_1 = 4$, $c_2 = -5$. Для нахождения x решим

уравнение $\sqrt{x^2+2x+8} = 4$, $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$. Уравнение $\sqrt{x^2+2x+8} = -5$ не имеет решений. Ответ: -4 и 2.

3) Запишем исходное уравнение в виде $(3^x)^2 + 3^x \cdot 4^x - 2 \cdot (4^x)^2 = 0$. Получили однородное уравнение второй степени. Разделим уравнение на 4^{2x} и получим $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 2 = 0$.

Введём новую переменную $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, $t > 0$, и получим уравнение относительно t: $t^2 + t - 2 = 0$. Найдя $t = 1$, а затем и x, запишем ответ: $x = 0$.

4) Так как $4^{\sqrt{x}} = (2^{\sqrt{x}})^2$ и $2^{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\sqrt{x}}$, то уравнение примет вид $(2^{\sqrt{x}})^2 - \frac{9}{2} \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$. Произведём замену переменной $a = 2^{\sqrt{x}}$, где $a \geqslant 1$. Получим уравнение $a^2 - \frac{9}{2}a + 2 = 0$, корни которого $a_1 = 4$, $a_2 = 0{,}5$. Возвращаемся к x: $2^{\sqrt{x}} = 4$, $x = 4$.

6) Введём новую переменную $t = \sin^2 x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда: $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1-t)^2$, $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4t(1-t)$. Получаем: $5t^2 - (1-t)^2 = 4t(1-t)$, $8t^2 - 2t - 1 = 0$, $t = \frac{1}{2}$. Возвращаемся к x: $\sin^2 x = 0{,}5$, $x = \pi n \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7) Числа $4 + \sqrt{15}$ и $4 - \sqrt{15}$ взаимно обратные, так как их произведение равно 1. Сделаем замену переменных: $y = (4 + \sqrt{15})^x$ и получим уравнение: $y + \frac{1}{y} = 8$. Его корни $y_1 = 4 + \sqrt{15}$ и $y_2 = 4 - \sqrt{15}$. Затем находим значение исходной переменной x: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

310. 4) Левая и правая части уравнения положительны и определены при $x > 0$. Логарифмируя их по основанию 10, получаем $\frac{\lg x + 5}{3} \lg x = \lg x + 1$. Введём переменную $p = \lg x$ и решим уравнение $p^2 + 5p = 3p + 3$. Его корни $p_1 = -3$, $p_2 = 1$. Возвращаемся к переменной x: $x_1 = 0{,}001$, $x_2 = 10$.

7) Подбором находим корень $x = 0$ и, поскольку левая часть убывает, а правая возрастает, убеждаемся, что он единственный.

311. 6) Значения $x - 15$ и $\cos x$ должны быть либо оба положительны, либо оба отрицательны. Тогда получим:

$$\log_3|x-15| + \log_3|\cos x| = \log_3|x-15| - \log_3|\cos x|,$$

$$2\log_3|\cos x| = 0, \quad |\cos x| = 1.$$

Имеем: $\begin{cases}\cos x = 1, \\ x - 15 > 0\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos x = -1, \\ x - 15 < 0,\end{cases}$ $x = 2\pi n$, где n принимает все натуральные значения, большие 2, или $x = \pi + 2\pi n$, где n принимает все целые значения, меньшие 2.

10) Левая часть равенства задаёт функцию $f(x) = \cos x \cos 3x$, периодом которой является число π. Найдём корни данного уравнения на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а затем, использовав чётность функции $f(x)$, добавим противоположные им числа и получим корни на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ длиной в период. Исследуем функцию $f(x)$. Производная $f'(x) = -(\sin x\cos 3x + 3\cos x\sin 3x)$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ отрицательна, значит, функция f убывает. На промежутке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $f(x) \leqslant 0$, т. е. заведомо меньше положительного числа $\cos 0{,}3 \cdot \cos 0{,}9$. Таким образом, на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеется единственный и очевидный корень уравнения, равный 0,3. На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет два корня: $\pm 0{,}3$. Добавляя периоды, получаем о т в е т: $\pm 0{,}3 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

11) При $|x| > 1$ модуль каждого из трёх множителей левой части больше 1, и их произведение не равно 1. Искомые решения следует искать на отрезке $[-1; 1]$, поэтому замена $x = \cos y$ не приведёт к потере корней:

$$8\cos y\cos 2y(8\cos^2 y(-\sin^2 y) + 1) = 1,$$

$$8\cos y\cos 2y(-2\sin^2 2y + 1) = 1, \quad 8\cos y\cos 2y\cos 4y = 1.$$

Поскольку значения $y = \pi k$ не удовлетворяют этому уравнению, а значит, $\sin y \neq 0$, умножим обе части на $\sin y$:

$$\sin 8y = \sin y,\ 7y = 2\pi k \text{ или } 9y = \pi(2k+1),$$

$$y = \frac{2}{7}\pi k \text{ или } y = \frac{1}{9}\pi(2k+1),$$

где $k \in \boldsymbol{Z}$ с учётом того, что $y \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Этим углам соответствуют 7 различных значений косинуса, которые и являются корнями исходного уравнения:

$$\cos\frac{2\pi k}{7},\ k = 1;\ 2;\ 3 \text{ и } \cos\frac{\pi(2k+1)}{9},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

12) Поскольку 0 не является корнем данного уравнения, то, разделив обе части уравнения на x^2, получим равносильное уравнение $\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$. Делаем замену переменной $y = 2x + \frac{1}{x}$, получаем уравнение $(y - 3)(y + 5) = 9$. Корни данного уравнения -6 и 4. Решая уравнения относительно переменной x, получаем корни

$$\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2} \text{ и } \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

13) Поскольку $x = 0$ не является решением данного уравнения, то, разделив обе его части на x^2, получим $x^2 - 2x - 1 - 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Группируем члены следующим образом: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$. Делаем замену переменных: $y = x + \frac{1}{x}$ и получаем уравнение относительно y: $y^2 - 2y - 3 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = -1$. Возвращаясь к переменной x, находим корни исходного уравнения

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

П. 17

314. е) Сначала избавляемся от x в третьем уравнении, вычитая из него сумму первого и второго, затем избавляемся от x во втором уравнении, вычитая из него удвоенное первое, затем избавляемся от y в третьем и, наконец, найдя из третьего значение z, подставляем его во второе, находим y и подставляем в первое:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1, \\ 2x + 3y - z = 11, \\ 3x - 2y + 2z = -7; \end{cases} \begin{cases} x + 3y + 2z = 1, \\ 2x + 3y - z = 11, \\ -8y + z = -19; \end{cases} \begin{cases} x + 3y + 2z = 1, \\ -3y - 5z = 9, \\ -8y + z = -19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1, \\ 24y + 40z = -72, \\ -24y + 3z = -57; \end{cases} \begin{cases} x + 3y + 2z = 1, \\ 3y + 5z = -9, \\ 43z = -129; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = -3. \end{cases}$$

д) Сложим и вычтем эти два уравнения и получим новую систему:

$$\begin{cases} 2(x - y) = -2, \\ 2xy = 12, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -1, \\ xy = 6. \end{cases}$$

$x_1 = 2$, $y_1 = 3$ или $x_2 = -3$, $y_2 = -2$.

г) Сложим и вычтем эти два уравнения и получим новую систему: $\begin{cases} (x + y)^2 = 16, \\ (x - y)(x + y) = 40, \end{cases}$ которая сводится к решению двух систем: 1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x - y)(x + y) = 40 \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ (x - y)(x + y) = 40. \end{cases}$ Во втором уравнении заменим $x + y$ его значениями и получим системы: $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 10 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = -4, \\ x - y = -10. \end{cases}$

Найдём решения систем: $(7; -3)$ и $(-7; 3)$.

315. Находим a и b:

$$\begin{cases} P'(1) = 0, \\ P'(3) = 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} 3 + 2a + b = 0, \\ 27 + 6a + b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -6, \\ b = 9. \end{cases}$$

Значение c находим из условия $P(1) = 4$: $1 - 6 + 9 + c = 4$, $c = 0$. Теперь найдём $P(3)$: $P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$.

316. 2) Из первого уравнения находим $2x + 3y = \pi k$, а из второго $3x - 2y = 2\pi n$. Получаем систему $\begin{cases} 2x + 3y = \pi k, \\ 3x - 2y = 2\pi n. \end{cases}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{13}(2k + 6n)$, $y = \frac{\pi}{13}(3k - 4n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

317. 1) Вычтем из второго уравнения первое и получим новую систему: $\begin{cases} \dfrac{9}{x - y} = \dfrac{9}{4}, \\ \dfrac{1}{x + y} + \dfrac{3}{x - y} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ Отсюда $x - y = 4$. Подставим данное значение во второе уравнение системы и найдём, что $x + y = -2$. Получили систему $\begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = -2. \end{cases}$ Ответ: $(1; -3)$.

318. 1) Ни при каких значениях x и y обе части первого уравнения не обращаются в нуль одновременно, следовательно, можно разделить второе уравнение на первое:

$\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ \dfrac{x+y}{x-y} = 4. \end{cases}$ Из второго уравнения выражаем y: $y = \dfrac{3x}{5}$.

Подставим значение y в первое уравнение и найдём x: $x = 5$. Ответ: $(5; 3)$.

2) Заменим первое уравнение его суммой со вторым, а второе — его разностью с первым: $\begin{cases} x^2y^3 = 8, \\ x^3y^2 = 4. \end{cases}$ Разделив первое уравнение на второе, правая часть которого отлична от нуля, получим $\dfrac{y}{x} = 2$, $y = 2x$. Подставим $2x$ вместо y во второе уравнение: $x^3 \cdot 4x^2 = 4$, $x = 1$. Найдём значение второй переменной: $y = 2$. Ответ: $(1; 2)$.

5) Разделив первое уравнение на второе, получим $\cos x = 2\cos y$. С учётом этого из второго уравнения получаем $\sqrt{3}\cos y = \sin x \cos y + 2\cos y \sin y$. Поскольку $\cos y = 0$ не удовлетворяет второму уравнению системы, разделим обе части уравнения на $\cos y$.

$$\sqrt{3} = \sin x + 2\sin y,\ \sin x = \sqrt{3} - 2\sin y.$$

Возведём обе части в квадрат.

$$1 - \cos^2 x = 4\sin^2 y + 3 - 4\sqrt{3}\sin y,$$

$$1 - 4\cos^2 y = 4\sin^2 y + 3 - 4\sqrt{3}\sin y,\ \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \cos y_1 = \frac{1}{2},\ \cos x_1 = 1,\ x_1 = 2\pi n,\ k, n \in \boldsymbol{Z};$$

$y_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\cos y_2 = -\dfrac{1}{2}$, $\cos x_2 = -1$, $x_2 = \pi(2n+1)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

Мы возводили уравнение $\sin x = \sqrt{3} - 2\sin y$ в квадрат, поэтому придётся сделать проверку, подставив в это уравнение соответствующие значения $\sin x$ и $\sin y$.

$$\sin x_{1,2} = 0,\ \sin y_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0 = \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Посторонних решений нет.

Ответ: $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\pi(2n+1); \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

6) Заменим первое уравнение его суммой со вторым:

$\begin{cases} x\sin^2 x + x\cos^2 x = y\cos^2 y + y\sin^2 y, \\ x\cos^2 x = y\sin^2 y; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y, \\ x\cos^2 x = x\sin^2 x. \end{cases}$

Решаем второе уравнение системы: $x\cos^2 x = x\sin^2 x$, $x = 0$ или $\cos^2 x = \sin^2 x$, $x = 0$ или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$. С учётом первого уравнения получаем о т в е т: $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n\right)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

319. 1) Сделаем замену переменной $z = \log_x 2$, $z \neq 0$, и получим новую систему $\begin{cases} 6z + 3y = 24, \\ 2z^3 + y = 8. \end{cases}$ Умножая второе уравнение системы на 3 и вычитая результат из первого уравнения системы, получаем уравнение относительно z: $z(1 - z^2) = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 0$ (посторонний корень). Подставляя найденные значения z во второе уравнение, находим y: $y_1 = 6$ и $y_2 = 10$. Затем находим x, используя формулу замены переменной: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. О т в е т: (2; 6) и (0,5; 10).

5) Сделаем замену переменных $3^x = a$, $2^{\frac{y}{2}} = b$, получим новую систему $\begin{cases} a^2 - b^2 = 77, \\ a - b = 7. \end{cases}$ Первое уравнение разделим на второе, получим систему $\begin{cases} a + b = 11, \\ a - b = 7. \end{cases}$ Найдём a и b. $a = 9$, $b = 2$. Найдём x и y по формулам замены переменных: $x = 2$, $y = 2$.

320. 2) Сделав замену $\sin x = a$ и $\sin y = b$ и выразив все остальные члены через $\sin x$ и $\sin y$, приходим к системе $\begin{cases} 3ab - b^2 = -1, \\ b^2 - 21a^2 = -5. \end{cases}$ Получили однородную систему относительно a и b.

321. 1) Делаем замену $x + y = u$, $xy = v$ и получаем систему $\begin{cases} u^2 - 2v = 25, \\ u = 7. \end{cases}$ Откуда $\begin{cases} v = 12, \\ u = 7. \end{cases}$ Далее решаем систему $\begin{cases} xy = 12, \\ x + y = 7 \end{cases}$ относительно x и y. О т в е т: (3; 4), (4; 3).

322. 6) Обозначим $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = v$, тогда $u^3 + v^3 = 2$. Имеем:

$$\begin{cases} u+v=2, \\ u^3+v^3=2; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v=2, \\ u^2-uv+v^2=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u+v=2, \\ (u+v)^2-u^2+uv-v^2=3; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v=2, \\ uv=1; \end{cases} \quad u=v=1.$$

Возвращаясь к x, получим $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 1$, $x = 0$.

8) В уравнении $\sqrt[4]{41-x} + \sqrt[4]{41+x} = 4$ обозначим $\sqrt[4]{41-x} = u$, $\sqrt[4]{41+x} = v$, тогда $u^4 + v^4 = 82$. Получим систему $\begin{cases} u+v=4, \\ u^4+v^4=82. \end{cases}$ Обозначим $uv = z$, тогда $u^4 + v^4 = (u^2+v^2)^2 - 2z^2 = ((u+v)^2 - 2z)^2 - 2z^2 = (4^2 - 2z)^2 - 2z^2$. Подставим полученное выражение во второе уравнение $16^2 - 64z + 4z^2 - 2z^2 = 82$, $z^2 - 32z + 87 = 0$, $z = 3$ или $z = 29$. Возвращаясь к u и v, получим: $\begin{cases} u+v=4, \\ uv=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} u+v=4, \\ uv=29. \end{cases}$ Вторая система решений не имеет, а значения u из первой системы равны 1 и 3. Возвращаясь к x, получим $\sqrt[4]{41-x} = 1$ или $\sqrt[4]{41-x} = 3$, $x = 40$ или $x = -40$.

323. 3) $\begin{cases} \log_2(x+y)=3, \\ \lg \frac{x}{y} + \lg \frac{x}{y} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{x}{y} = \sqrt{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} y(\sqrt{10}+1)=8, \\ x = y\sqrt{10}; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{8}{\sqrt{10}+1}, \\ x = \dfrac{8\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}. \end{cases}$$

5) Учитывая, что x и y в системе $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=7, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6 \end{cases}$ могут быть только положительными, имеем: $\begin{cases} x^2+y^2=2^7, \\ xy=2^6; \end{cases}$

$(x+y)^2 - 2 \cdot 2^6 = 2^7$, $(x+y)^2 = 2^8$, $\begin{cases} x+y=2^4, \\ xy=2^6, \end{cases}$ $x = y = 8.$

13) Представим первое уравнение системы в виде $\frac{e^x}{\ln x} = \frac{e^y}{\ln y}$ и рассмотрим функцию $f(z) = \frac{e^z}{\ln z}$. Рассмотрим производную этой функции $f'(z) = \frac{e^z}{\ln^2 z}\left(\ln z - \frac{1}{z}\right)$ на промежутке $[3; +\infty)$, поскольку ОДЗ второго уравнения $x \geqslant 3$. При этом $y \geqslant 9$. На указанном промежутке производная $f'(z)$ положительна, значит, функция на нём возрастает. Из равенства значений возрастающей функции следует равенство значений её аргумента: $x = y$. Получаем $\begin{cases} x = y, \\ y - \sqrt{x-3} = 9. \end{cases}$

Ответ: (12; 12).

14) Обозначим $\operatorname{tg} x = u$, $\operatorname{tg} y = v$ $(uv \neq 0)$. Выразив $\sin 2x$ и $\sin 2y$ через u и v: $\sin 2x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\sin 2y = \frac{2v}{1+v^2}$, получим новую систему $\begin{cases} 10uv = 12 + 12u^2, \\ 10uv = 6 + 6v^2. \end{cases}$ Разделим первое уравнение на 2 и вычтем из него второе, получим $6u^2 + 5uv - 6v^2 = 0$. Разделим полученное однородное уравнение на v^2 и решим квадратное уравнение относительно $t = \frac{u}{v}$: $6t^2 + 5t - 6 = 0$, $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = -\frac{3}{2}$. Отсюда: 1) $u = \frac{2}{3}v$ или 2) $u = \frac{-3}{2}v$. Подставив эти выражения в уравнение $10uv = 6 + 6v^2$, получим: 1) $\frac{10}{3}v^2 = 3 + 3v^2$, $v^2 = 9$, $v_1 = 3$, $v_2 = -3$. 2) $-\frac{15}{2}v^2 = 3 + 3v^2$, нет решений. Найдём значения u: $u_1 = 2$, $u_2 = -2$. Вернёмся к x и y. Ответ: $(\operatorname{arctg} 2 + \pi n;\ \operatorname{arctg} 3 + \pi k)$, $(-\operatorname{arctg} 2 + \pi n;\ -\operatorname{arctg} 3 + \pi k)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

П. 18

325. 1) Решим уравнение относительно x: $ax - 2x = 1$, $x(a-2) = 1$, $x = \frac{1}{a-2}$. Корней нет при $a = 2$.

328. Рассмотрим значения d, близкие к нулю. Заданные условия позволяют построить прямоугольный треугольник с катетами 4 и d, гипотенуза b которого равна $\sqrt{4^2 + d^2} < 5$. Этот треугольник имеет наибольшую площадь среди всех треугольников со сторонами a и c. Площадь равна $0{,}5 \cdot 4d =$

$= 2d$. Значение d можно увеличивать до тех пор, пока $\sqrt{4^2 + d^2} \leqslant 5$, т. е. для всех значений $d \in (0;\ 3]$. Затем, продолжая брать $a = 4$, $b = 5$ и $c = d$ и увеличивая d, мы будем получать остроугольные треугольники. Их площадь находим по формуле Герона: $\sqrt{p(p-4)(p-5)(p-d)}$, где p — полупериметр треугольника, равный $0{,}5(9 + d)$. Такие треугольники будут иметь наибольшую площадь до тех пор, пока снова не получится прямоугольный треугольник, теперь уже с катетами 4 и 5, т. е. с гипотенузой $c = d = \sqrt{41}$. Дальнейшее увеличение d не приведёт к увеличению площади треугольника, так как две его стороны не могут стать больше 4 и 5 соответственно, а наибольшая площадь треугольника со сторонами 4 и 5 равна 10. Таким образом, $S = 2d$ при $d \in (0;\ 3]$, $S = \sqrt{p(p-4)(p-5)(p-d)}$ при $d \in (3;\ \sqrt{41})$, где $p = 0{,}5(9 + d)$, $S = 10$ при $d \in [\sqrt{41};\ +\infty)$.

329. 1) б) Так как число $x = 2$ является корнем, имеем $(a + 16) \cdot \sqrt{2a + 1} = 0$, $a + 16 = 0$ или $2a + 1 = 0$, $a = -16$ или $a = -0{,}5$. В ОДЗ уравнения входит $a = -0{,}5$.

в) Число 2 является корнем уравнения, если $|2 - a| \cdot 2 + a - 3 = 0$. Если $a \leqslant 2$, то $4 - 2a + a - 3 = 0$, $1 - a = 0$, $a = 1$, если $a > 2$, то $-4 + 2a + a - 3 = 0$, $-7 + 3a = 0$, $a = \frac{7}{3}$.

г) $\sqrt{8 - a} = 4 + a$, $8 - a = 16 + 8a + a^2$, $a^2 + 9a + 8 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = -8$. Проверка оставляет только a_1.

2) $-2 > |2 + 3a| - 4$, $|2 + 3a| < 2$, $-2 < 2 + 3a < 2$, $-4 < 3a < 0$, $-\frac{4}{3} < a < 0$.

331. 1) Чтобы уравнение $(0{,}2)^x = \frac{2a + 3}{5 - a}$ не имело корней, должно выполняться неравенство $\frac{2a + 3}{5 - a} \leqslant 0$, $a \in \left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right] \cup$ $\cup (5;\ +\infty)$. Заметим, что $a = 5$ не является допустимым значением.

2) Чтобы уравнение $(0{,}2)^x = \frac{2a + 3}{5 - a}$ имело отрицательные корни, должно выполняться неравенство $\frac{2a + 3}{5 - a} > 1$, $\frac{2a + 3 - 5 + a}{5 - a} > 0$, $\frac{3a - 2}{5 - a} > 0$, $a \in \left(\frac{2}{3};\ 5\right)$.

336. 2) Так как выражения, стоящие в правой и левой частях уравнения, имеют смысл при $m \neq 1$ и $x \neq -3$, умножаем обе части уравнения на $(m-1)(x+3)$ и упрощаем. Получим $(4m-9)x = 31 - 2m$. При $m \neq \frac{9}{4}$ уравнение имеет корень $x = \frac{31-2m}{4m-9}$. Осталось выяснить, при каких значениях m этот корень допустим, т. е. отличен от числа -3. Решая уравнение $\frac{31-2m}{4m-9} = -3$, находим, что $m = -\frac{2}{5}$. Если $m \neq 1$, $m \neq \frac{9}{4}$, $m \neq -\frac{2}{5}$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{31-2m}{4m-9}$. При $m = 1$, $m = \frac{9}{4}$, $m = -\frac{2}{5}$ корней нет. Значение $m = 1$ не является допустимым.

337. 1) При любом значении параметра a корни трёхчлена $x_1 = 1$ и $x_2 = a - 1$. $x_1^2 + x_2^2 = 1 + (a-1)^2$. Наименьшее значение, равное 1, сумма квадратов корней принимает при $a = 1$.

338. 1) После преобразования получим неравенство $\frac{-3x - 2ax + a^2 + 2a}{a+2} > 0$, $x \cdot \frac{2a+3}{a+2} < a$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x < \dfrac{a(a+2)}{3+2a}, \\ \dfrac{a+2}{2a+3} > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x > \dfrac{a(a+2)}{3+2a}, \\ \dfrac{a+2}{2a+3} < 0. \end{cases}$$

Отсюда находим решение неравенства: $\left(-\infty; \frac{a(a+2)}{2a+3}\right)$ при $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$; $\left(\frac{a(a+2)}{2a+3}; +\infty\right)$ при $a \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$; при $a = -\frac{3}{2}$ нет решений.

340. 2) Уравнение $a^2x - ax - 2a + 2 = 0$ не имеет корней при $a = 0$ и отрицательном дискриминанте: $a^2 + 4a^2(2a - 2) < 0$, $a^2(8a - 7) < 0$, $a < 0$, $0 < a < \frac{7}{8}$. О т в е т: $a < \frac{7}{8}$.

344. 2) Чтобы уравнение $9^x - 3^x + a = 0$ имело единственный корень, квадратное уравнение, к которому оно приводится заменой $3^x = t$, должно иметь единственный положительный корень. Уравнение $t^2 - t + a = 0$ имеет единственный положительный корень: 1) когда его единственный корень положителен, либо 2) когда один корень положителен, а другой 0, либо 3) когда его корни имеют разные знаки. Рассмотрим эти случаи:

1) $D = 0$: $1 - 4a = 0$, $a = 0{,}25$, $t_0 = 0{,}5$ что удовлетворяет требованию;

2) $t_1 = 0$, $a = 0$: $t_2 = 1$ — удовлетворяет требованию;

3) $a < 0$ — корни разных знаков.

Итак, требованию удовлетворяют $a \leqslant 0$ и $a = 0{,}25$.

345. 1) Выразим x^2 из уравнения $\dfrac{2x^2+3}{x^2+1} = a$: $2x^2 + 3 = ax^2 + a$, $(a-2)x^2 = 3 - a$, $x^2 = \dfrac{3-a}{a-2}$. Два решения уравнение имеет при $\dfrac{3-a}{a-2} > 0$, т. е. при $2 < a < 3$. Единственное решение при $a = 3$. Нет решений при $a \leqslant 2$ и при $a > 3$.

2) Исследуем функцию $y = \dfrac{5x^2+7}{x^2+2}$ на монотонность и экстремумы. Найдём промежутки знакопостоянства её производной $y' = \dfrac{10x(x^2+2) - 2x(5x^2+7)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{6x}{(x^2+2)^2}$.

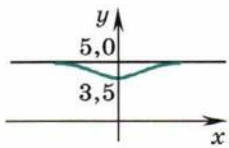


Рис. 156

$y' > 0$ при $x > 0$, $y' < 0$ при $x < 0$. Функция возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и имеет минимум, равный 3,5 в точке 0. Кроме того, график этой функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 5$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+7}{x^2+2} = 5$. Схематически график функции приведён на рисунке 156. Следовательно, уравнение не имеет решений при $a < 3{,}5$ и при $a \geqslant 5$, одно решение при $a = 3{,}5$ и два решения при $3{,}5 < a < 5$.

346. 1) Дискриминант должен быть положителен, абсцисса вершины соответствующей параболы больше b и значение при $x = b$ больше нуля: $\begin{cases} 1 - 4b > 0, \\ -\dfrac{1}{2} > b, \\ b^2 + b + b > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} b < \dfrac{1}{4}, \\ b < -\dfrac{1}{2}, \\ b < -2 \end{cases}$ или $b > 0$, $b < -2$;

2) значение при $x = b$ должно быть отрицательно:
$b^2 + 2b < 0$, $-2 < b < 0$.

347. $dx^2 - 6x + 7 < 0$. При $d \leqslant 0$ требование задачи не выполняется, так как есть решения большие, чем 1. При $d > 0$ вершина соответствующей параболы должна быть левее 1, а значение трёхчлена при $x = 1$ — неположительно:
$\begin{cases} \dfrac{3}{d} < 1, \\ d - 6 + 7 \leqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} d > 3, \\ d \leqslant -1, \end{cases}$ нет решений.

348. 1) Поскольку дискриминант положителен, нужно, чтобы абсцисса вершины параболы попала в интервал $(-2;\ 2)$ и значения трёхчлена на границах этого интервала были неотрицательны: $\begin{cases} -2 < b < 2, \\ 4 + 4b - 1 \geqslant 0, \\ 4 - 4b - 1 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < b < 2, \\ b \geqslant -\dfrac{3}{4}, \\ b \leqslant \dfrac{3}{4}, \end{cases}$ $|b| \leqslant \dfrac{3}{4}$.

2) Трёхчлен $4x^2 - a^2x - 3a$ должен иметь единственный корень, больший 1. Это может быть в трёх случаях: когда дискриминант трёхчлена равен нулю, когда корни трёхчлена расположены по разные стороны от 1 и когда один из корней трёхчлена равен 1, а другой больше, чем 1. Если $D = 0$, то $a^4 + 48a = 0$, $a = 0$ или $a = -\sqrt[3]{48}$. При $a = 0$ корень трёхчлена равен 0, что не удовлетворяет требованию. При $a = -\sqrt[3]{48}$ корень трёхчлена, равный $\dfrac{\sqrt[3]{48^2}}{8}$, больше 1, что соответствует требованию. Значение трёхчлена при $x = 1$ отрицательно, когда $4 - a^2 - 3a < 0$, $a^2 + 3a - 4 > 0$, $a < -4$ или $a > 1$. При этих значениях a корни трёхчлена расположены по разные стороны от 1. Корень трёхчлена равен 1 при $a = -4$ или $a = 1$. При $a = -4$ второй корень равен 3, что соответствует требованию, а при $a = 1$ второй корень меньше 1, что не удовлетворяет требованию задачи. Ответ: $a = -\sqrt[3]{48}$, $a \leqslant -4$, $a > 1$.

349. Значения трёхчлена на концах отрезка должны быть отрицательны: $\begin{cases} 1 - t + 1 < 0, \\ 4 - 2t + 1 < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} t > 2, \\ t > 2{,}5, \end{cases}$ $t > 2{,}5$.

350. Если $c = 0$, имеем корень $x = -1$, удовлетворяющий условию. Если $c \neq 0$, рассмотрим два случая: 1) когда уравнение имеет единственный корень и он принадлежит данному отрезку; 2) когда уравнение имеет два корня и лишь один из них принадлежит отрезку. 1) $D = (2c - 1)^2 + 4c = 4c^2 + 1 > 0$, следовательно, данное квадратное уравнение при любом c имеет два корня; 2) чтобы только один из корней принадлежал данному отрезку, значения квадратного трёхчлена на его концах могут иметь разные знаки, т. е. их произведение отрицательно: $(c - (2c - 1) - 1)(c + 2c - 1 - 1) < 0$, $-c(3c - 2) < 0$, $c(3c - 2) > 0$, $c < 0$ или $c > \frac{2}{3}$. Один из корней может совпасть с концом отрезка. При этом другой корень отрезку не принадлежит:

$$\begin{cases} c - 2c + 1 - 1 = 0, \\ \frac{1}{c} > 1 \text{ или } \frac{1}{c} \leqslant -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c + 2c - 1 - 1 = 0, \\ -\frac{1}{c} < -1 \text{ или } -\frac{1}{c} > 1. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а из второй находим $c = \frac{2}{3}$. Ответ: $c < 0, c \geqslant \frac{2}{3}$.

351. 1) Дискриминант трёхчлена должен быть положителен, абсцисса вершины параболы должна принадлежать данному отрезку, а значения трёхчлена на концах отрезка должны быть неотрицательными. Получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} a^2 - 8 > 0, \\ 1 < \frac{a}{2} < 3, \\ 1 - a + 2 \geqslant 0, \\ 9 - 3a + 2 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -2\sqrt{2} \text{ или } a > 2\sqrt{2}, \\ 2 < a < 6, \\ a \leqslant 3, \\ a \leqslant \frac{11}{3}; \end{cases} \quad 2\sqrt{2} < a \leqslant 3;$$

2) при $a = 2$: $f(x) = 4x + 5$ и единственный нуль $x = -\frac{5}{4}$ функции $f(x)$ принадлежит интервалу $(-2; 1)$. Следовательно, значение $a = 2$ удовлетворяет условию. Пусть теперь $a \neq 2$. Чтобы нули у $f(x)$ существовали, дискриминант квадратного трёхчлена $(a - 2)x^2 + 2ax + a + 3$ должен быть неотрицателен, откуда $a \leqslant 6$. Понятно, что абсцисса $x_0 = -\frac{a}{a - 2}$ вершины параболы должна принадлежать интервалу $(-2; 1)$. Значения квадратного трёхчлена на границах интервала $(-2; 1)$ должны иметь тот же знак, что и его старший коэффициент.

Получаем систему $\begin{cases} a \leqslant 6, \\ -2 < -\dfrac{a}{a-2} < 1, \\ (a-2)(a-5) > 0, \\ (a-2)(4a+1) > 0. \end{cases}$

Решая её, находим, что $a < -\dfrac{1}{4}$, $5 < a \leqslant 6$.

352. Точка пересечения соответствующих парабол должна лежать в нижней полуплоскости. $x^2 + \dfrac{8}{a}x - 2a = x^2 + \dfrac{6}{a}x - a$, $\dfrac{2x}{a} = a$, $x = \dfrac{a^2}{2}$. Чтобы получить ординату точки пересечения, подставим найденное значение a во второй трёхчлен. Его значение должно быть отрицательным:

$$\frac{a^4}{4} + 3a - a < 0,\ a(a^3+8) < 0,\ -2 < a < 0.$$

353. Пусть корни первого трёхчлена α_1 и α_2, а второго — β_1 и β_2 (оба дискриминанта положительны). Тогда значения параметра, при которых система несовместна (не имеет решений), соответствуют единственному расположению корней: $\alpha_1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 \leqslant \alpha_2$.

$$\frac{3a - 3\sqrt{a^2+8}}{4} \leqslant \frac{-a - \sqrt{a^2+8}}{2} < \frac{-a + \sqrt{a^2+8}}{2} \leqslant \frac{3a + 3\sqrt{a^2+8}}{4},$$

$$\begin{cases} 3a - 3\sqrt{a^2+8} \leqslant -2a - 2\sqrt{a^2+8}, \\ -2a + 2\sqrt{a^2+8} \leqslant 3a + 3\sqrt{a^2+8}, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{a^2+8} \geqslant 5a, \\ \sqrt{a^2+8} \geqslant -5a, \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2+8} \geqslant |5a|,\ a^2 + 8 \geqslant 25a^2,\ a^2 \leqslant \frac{1}{3},\ |a| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ответ: $|a| \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

354. Нужно, чтобы на границах интервала (1; 2) значения трёхчлена были меньше или равны нулю: $\begin{cases} m^2 + 7m + 1 \leqslant 0, \\ m^2 + 8m + 4 \leqslant 0. \end{cases}$

Найдём корни трёхчленов $f(m) = m^2 + 7m + 1$ и $g(m) = m^2 + 8m + 4$: $f(m) = 0$, $\alpha_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; $g(m) = 0$, $\beta_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$.

Чтобы установить взаимное расположение найденных корней, изобразим схематически соответствующие параболы. Для этого находим координаты их общей точки: $f(m) = g(m)$, $m_0 = -3$; $f(-3) = -11$ и угловые коэффициенты касательных к параболам в этой точке:

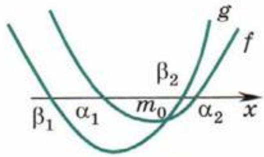


Рис. 157

$f'(m) = 2m + 7$, $f'(-3) = 1$, $g'(m) = 2m + 8$, $g'(-3) = 2$ (рис. 157). Решения системы заполняют отрезок от меньшего корня первого до большего корня второго члена.

Ответ: $m \in \left[-\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}); -4 + 2\sqrt{3}\right]$.

355. 1) ОДЗ уравнения — все числа, кроме 3 и −1. На этом множестве данное уравнение равносильно уравнению $(x + a) \times \times (x - 3) + (a - 3x)(x + 1) = 2(x + 1)(x - 3)$. В результате преобразований получаем уравнение $2x^2 + x(1 - a) + a - 3 = 0$. Сумма коэффициентов в уравнении равна нулю, т. е. $2 + 1 - - a + a - 3 = 0$, следовательно, $x_1 = 1$. По теореме Виета $x_2 = 0{,}5(a - 3)$. Таким образом, при любом значении параметра a исходное уравнение имеет корень $x_1 = 1$. Чтобы этот корень был единственным, необходимо и достаточно, чтобы корень x_2 не входил в ОДЗ, т. е. $x_2 = 3$ или $x_2 = -1$, либо чтобы x_2 совпадал с x_1, т. е. $x_2 = 1$. Имеем: если $x_2 = 3$, то $a = 9$; если $x_2 = -1$, то $a = 1$; если $x_2 = 1$, то $a = 5$. Итак, искомые значения параметра a равны 1; 5 и 9. Ответ: 1; 5 и 9.

357. 1) Рассмотрим уравнение $2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2 = 0$ относительно параметра a, т. е. решим квадратное уравнение $a^2 - (x^2 + x)a + 2x^3 - 2x^2 = 0$, $D = (x^2 + x)^2 - 8x^3 + 8x^2 = = x^2(x - 3)^2$, $a_1 = x^2 - x$, $a_2 = 2x$. Имеем $(a - x^2 + x)(a - 2x) = 0$. Из уравнений $x^2 - x = a$ и $2x = a$ найдём корни:

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ и $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$, $x_3 = \frac{a}{2}$ при $a \geqslant -\frac{1}{4}$, $x = \frac{a}{2}$ при $a < -\frac{1}{4}$.

2) Решаем уравнение как квадратное относительно a, его корни $a_1 = x^2 + x$, $a_2 = \frac{x^2}{2}$. Раскладываем левую часть исходного уравнения на множители: $(a - (x^2 + x))\left(a - \frac{x^2}{2}\right) = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}$ или $x = \pm\sqrt{2a}$. При $a < -\frac{1}{4}$ нет корней, при

$a = -\frac{1}{4}$ один корень $-\frac{1}{2}$; при $-\frac{1}{4} < a < 0$ два корня: $\frac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$; при $a = 0$ два корня: -1, 0; при $a > 0$ четыре корня: $\pm\sqrt{2a}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$.

358. 1) В уравнении $x^4 - 2\sqrt{2}\,x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$ обозначим $\sqrt{2}$ буквой a так, чтобы получить квадратное уравнение относительно a, которое и будем решать: $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$. $a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0$, $D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 1 + 4x = (2x + 1)^2$, $a_{1;\,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2}$. Заменяя a его изначальным значением $\sqrt{2}$, получим: $2x^2 - 2x = 2\sqrt{2}$ или $2x^2 + 2x + 2 = 2\sqrt{2}$, $2x^2 - 2x - 2\sqrt{2} = 0$ или $2x^2 + 2x + 2 - 2\sqrt{2} = 0$. Корни первого уравнения $x_{1;\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$, а корни второго — $x_{3;\,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$.

3) Непрерывная функция $y = 2x^3 + x + \sqrt{2}$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, значит, уравнение $2x^3 + x + \sqrt{2} = 0$ имеет единственный корень. Обозначим $\sqrt{2}$ буквой a и рассмотрим квадратное уравнение относительно a: $a^2x^3 + a + x = 0$, $D = 1 - 4x^4$, $a_{1;\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4x^4}}{2x^3}$. Возвращая a его значение $\sqrt{2}$, получим $\sqrt{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4x^4}}{2x^3}$, $(x\sqrt{2})^3 + 1 = \pm\sqrt{1 - 4x^4}$. Применяя в левой части уравнения формулу суммы кубов, а в правой дважды формулу разности квадратов, получим $(x\sqrt{2} + 1)(2x^2 - x\sqrt{2} + 1) = \pm\sqrt{(1 + 2x^2)(1 - x\sqrt{2})(1 + x\sqrt{2})}$. При $x\sqrt{2} + 1 = 0$ обе части равенства обращаются в нуль, значит, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ — искомый корень уравнения.

359. 1) При любом отрицательном значении a система имеет решение, например, $x = 1$. При $a = 0$ система также имеет решение, тоже $x = 1$. Если $a > 0$, то система может быть записана так $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{a}, \\ x \geqslant 4a, \end{cases}$ и для существования решения необходимо и достаточно выполнение неравенства $4a \leqslant \dfrac{1}{a}$, т. е. $0 < a^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$, $0 < |a| \leqslant 0,5$. Окончательно получаем $a \leqslant 0,5$.

364. Наибольшее значение функции должно быть не меньше 5, а наименьшее — не больше –6. Своё наибольшее значение функция принимает, когда $\cos x = 0$: $\max y = |a|$. Наименьшее значение функции y такое же, как и у функции $z = a \sin x - 3 \cos x = \sqrt{a^2+9} \sin (x + \varphi)$. $\min y = -\sqrt{a^2+9}$. Получаем: $\begin{cases} |a| \geqslant 5, \\ -\sqrt{a^2+9} \leqslant -6, \end{cases}$ $\begin{cases} |a| \geqslant 5, \\ a^2 \geqslant 27, \end{cases}$ $|a| \geqslant 3\sqrt{3}$.

365. Перейдём к квадратному уравнению относительно $\sin x$:

$$2\sin^2 x - (2a+1) \sin x + a = 0.$$

1) Один корень на указанном интервале данное уравнение имеет тогда и только тогда, когда функция $f(z) = 2z^2 - (2a + 1)z + a$ имеет на промежутке $(0; 1]$ единственный нуль при $z = 1$. Любое другое значение из промежутка $(0; 1]$ синус принимает при двух значениях x из интервала $(0; \pi)$. $f(1) = 0$ при $2 - 2a - 1 + a = 0$, $a = 1$. Второй корень трёхчлена f при $a = 1$ равен 0,5. Этот корень входит в промежуток $(0; 1]$, и ему соответствуют два значения x из интервала $(0; \pi)$, что не удовлетворяет требованию единственности корня.

Ответ: один корень на указанном промежутке уравнение иметь не может.

2) Два корня на указанном промежутке данное уравнение имеет, когда трёхчлен $f(z)$ обращается в нуль в одной-единственной точке промежутка $(0; 1)$. Это может произойти в трёх случаях:

1. $\begin{cases} D = 0, \\ 0 < z_0 < 1. \end{cases}$ 2. $f(0) \cdot f(1) < 0$. 3. $\begin{cases} f(0) = 0, \\ 0 < z_0 < 1, \\ f(1) > 0. \end{cases}$

Рассмотрим их.

Случай 1. $D = (2a + 1)^2 - 8a = (2a - 1)^2$, $D = 0$ при $a = 0,5$,

$$z_0 = \frac{2 \cdot 0,5 + 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Условие первого случая выполняется при $a = 0,5$.

Случай 2. $a(1-a)<0$, $a<0$ или $a>1$.

Случай 3. $a=0$, $z_0=\dfrac{2\cdot 0+1}{4}=0{,}25$, $2-1>0$, $a=0$ удовлетворяет всем требованиям случая 3.

Ответ: $a\leqslant 0$, $a=0{,}5$, $a>1$.

3) Три корня на данном промежутке данное уравнение имеет, если $f(1)=0$, а другой корень трёхчлена f принадлежит интервалу $(0;\ 1)$. При выполнении задания 1) мы увидели, что данное условие выполняется при $a=1$.

Ответ: $a=1$.

4) Четыре корня на данном промежутке уравнение имеет тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ имеет на интервале $(0;\ 1)$ ровно два нуля. Для этого должно быть

$$\begin{cases} D>0,\\ 0<z_0<1,\\ f(0)>0,\\ f(1)>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a\neq 0{,}5,\\ 0<\dfrac{2a+1}{4}<1,\\ a>0,\\ 1-a>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a\neq 0{,}5,\\ -0{,}5<a<1{,}5,\\ a>0,\\ a<1. \end{cases}$$

Ответ: $0<a<0{,}5$, $0{,}5<a<1$.

366. 3) Введём новую переменную $x=z+2a$, что не повлияет на количество корней. Получим уравнение $(x-2a)\times$ $\times\,|x|=a-1$. При $x=0$ левая часть равенства обращается в нуль, откуда $a=1$. Однако при этом значении a уравнение имеет ещё и корень $x=2$, что исключает 1 из искомого множества значений a.

При $x\neq 0$ мы можем разделить обе части уравнения на $|x|$: $x-2a=\dfrac{a-1}{|x|}$ и решать задачу графически. При любом $a\neq 1$ график правой части уравнения получается из гиперболы, а графиком левой части является прямая, сдвинутая вертикально на $-2a$. На рисунке 158 изображены случаи распо-

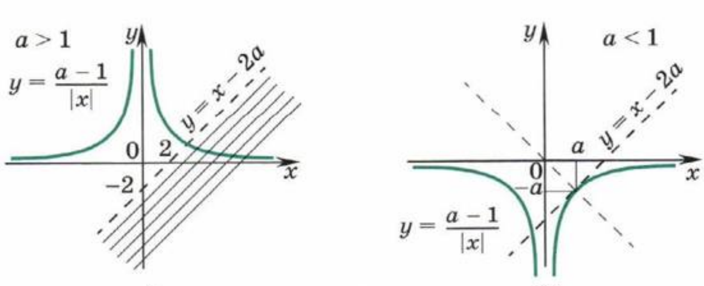


Рис. 158

ложения графиков, удовлетворяющие требованию единственности решения.

На рисунке 158, *а* при $a > 1$ любая прямая $y = x - 2a$ пересекает график $y = \frac{a-1}{|x|}$ в единственной точке. Значит, все $a > 1$ удовлетворяют требованию задачи.

На рисунке 158, *б* при $a < 1$ единственную общую точку будут иметь с графиком прямые, расположенные выше касательной. Поскольку гипербола симметрична относительно биссектрисы II и IV координатных углов, прямая $y = x - 2a$ касается гиперболы в точке этой биссектрисы. Отсюда $-a = \frac{a-1}{a}$, $a^2 + a - 1 = 0$, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, прямые $y = x - 2a$ расположены выше касательной, значит, эти значения a удовлетворяют требованию задачи.

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

4) $1 + \{x\} = \cos^2 ax$. При любом значении параметра a число 0 является корнем данного уравнения. Из других значений x равенство возможно только при целых значениях x, в противном случае левая часть равенства будет больше 1, т. е. заведомо больше его правой части. С другой стороны, $\cos^2 ax = 1$ при $x = \frac{\pi n}{a}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Значит, $\frac{\pi n}{a}$ не должно быть целым числом, отличным от нуля: $\frac{\pi n}{a} \neq k$. Отсюда $a \neq \frac{n}{k}\pi$. То есть a не должно быть равно произведению π ни на какое рациональное число. $a = \pi s$, где $s \in I$ (I — множество иррациональных чисел).

Глава 6

Элементы теории вероятностей и статистики

П. 19

373. 1) Возможны следующие два равновероятных варианта: младший ребёнок мальчик, младший ребёнок девочка. Следовательно, вероятность того, что оба ребёнка мальчики, в этом случае равна 0,5.

2) Возможны следующие три равновероятных варианта по старшинству детей: мальчик — мальчик, мальчик — девоч-

ка, девочка — мальчик. Следовательно, вероятность того, что оба ребёнка мальчики, в этом случае равна $\frac{1}{3}$.

374. И в том и в другом случае речь идёт о произведении одних и тех же событий, поэтому вероятности должны быть равными. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$.

375. Из 28 костей домино 16 имеют чётную сумму очков, из них 7 дублей. Значит, искомая вероятность равна $\frac{7}{16}$.

376. Пусть событие A заключается в том, что из первого ящика возьмут белый шар, а событие B — что из второго ящика возьмут белый шар. Тогда искомое событие представляет собой сумму несовместных событий $A\overline{B} + \overline{A}B$. События A и B независимы, поэтому $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{12} + \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{12} = \frac{11}{18}$. Ответ: $\frac{11}{18}$.

377. Извлечение шаров из разных урн — события независимые, значит, вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.

1) Оба шара белые: $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{16} = \frac{35}{192}$; 2) оба шара чёрные: $\frac{7}{12} \cdot \frac{9}{16} = \frac{21}{64}$; 3) шары чёрный — белый или белый — чёрный.

Вероятность можно найти двумя способами.

Способ 1. События несовместны, значит:

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{7}{16} + \frac{5}{12} \cdot \frac{9}{16} = \frac{49 + 45}{192} = \frac{94}{192} = \frac{47}{96}.$$

Способ 2. Извлечение шаров разного цвета — событие, противоположное извлечению шаров одного цвета. Вероятность извлечь шары одного цвета складывается из извлечения белых и чёрных шаров. Поскольку события несовместны, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей: $\frac{35}{192} + \frac{21}{64} = \frac{35 + 63}{192} = \frac{98}{192}$. Вероятность противоположного события равна $1 - \frac{98}{192} = \frac{94}{192} = \frac{47}{96}$.

378. Пусть событие A — выход из строя первого прибора, а B — выход из строя второго прибора.

1) Выход из строя обоих приборов — это произведение независимых событий A и B.

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12.$

2) Выход из строя хотя бы одного прибора — это сумма событий A и B. Имеем:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,58.$

3) *Способ 1.* Если ни один из приборов не выйдет из строя, значит, произошло произведение событий, противоположных событиям A и B: $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = (1 - 0,3)(1 - 0,4) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42.$

Способ 2. Если ни один из приборов из строя не вышел, значит, сумма событий $A + B$ не произошла. Нам нужно найти вероятность события, противоположного событию $A + B$. $P(\overline{A + B}) = 1 - P(A + B) = 1 - 0,58 = 0,42.$

379. Датчики действуют независимо друг от друга. Обозначим срабатывание первого датчика при аварии событием A, а второго — B. Нужно найти вероятность суммы несовместных событий: $A\overline{B} + \overline{A}B$. $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0,95 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,9 = 0,14.$

Ответ: 0,14.

380. Событие противоположно общему промаху.

$$1 - P(\overline{p_1} \cdot \overline{p_2} \cdot \overline{p_3}) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Ответ: 0,994.

381. Пусть попадание в цель первым стрелком — событие A, а вторым — событие B. События A и B независимы.

$$1)\ P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

2) Событие противоположно событию $\overline{A} \cdot \overline{B}$ — промаху обоих стрелков:

$$1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - 0,2 \cdot 0,1 = 0,98.$$

3) Событие является суммой несовместных событий:

$$A\overline{B} + \overline{A}B.$$

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,26.$$

Ответ: 1) 0,72; 2) 0,98; 3) 0,26.

382. Пусть событие A заключается в том, что формула содержится в первом справочнике, событие B — во втором, а событие C — в третьем справочнике.

События A, B и C независимы.

1) Данное событие представляет собой сумму несовместных событий

$A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$. $P(A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C) = P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}036 + 0{,}056 + 0{,}096 = 0{,}182$.

2) Данное событие представляет собой сумму несовместных событий $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$.

$$P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC) = P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}084 + 0{,}144 + 0{,}224 = 0{,}452.$$

3) $P(ABC) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}336$.

Ответ: 1) 0,182; 2) 0,452; 3) 0,336.

383. Пусть наличие формулы в первом справочнике A, во втором B и в третьем C. События A, B и C независимые.

1) Ко второму справочнику студент обратится в случае отсутствия формулы в первом, т. е. должно произойти событие $\bar{A}B$.

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28.$$

2) К третьему справочнику студент обратится в случае отсутствия формулы в первых двух. То есть должно произойти событие $\bar{A}\bar{B}C$.

$$P(\bar{A}\bar{B}C) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}096.$$

3) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}024$.

384. События независимы.

1) $P = (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8)(1 - 0{,}9) = 0{,}006$;

2) $P = 0{,}7(1 - 0{,}8)(1 - 0{,}9) + 0{,}8(1 - 0{,}7)(1 - 0{,}9) + 0{,}9 \times (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}092$.

3) $P = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

Ответ: 1) 0,006; 2) 0,092; 3) 0,994.

385. Найдём вероятность противоположного события, т. е. того, что цель не будет поражена. Все стрелки должны промахнуться. Вероятность промаха у пяти из них равна 0,4, трое промахиваются с вероятностью 0,5, а остальные — с вероятностью 0,6. Совместный промах заключается в том, что независимо друг от друга каждый из стрелков промахивается. Значит, вероятность общего промаха равна $0{,}4^5 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}6^2 \approx 0{,}0005$. Вероятность поражения цели равна $1 - 0{,}0005 = 0{,}9995$, т. е. цель почти наверняка будет поражена.

386. Найдём вероятность противоположного события, которое заключается в том, что дни рождения ни у кого не совпадут. Рассмотрим список из 25 учеников. Вероятность того, что у второго ученика день рождения не совпадает с днём рождения первого ученика, равна $\frac{364}{365}$, так как второй ученик мог родиться в любой из 364 дней, «свободных» от рождения первого ученика. Третьему ученику «разрешается» родиться в один из оставшихся после первых двух 363 дней, поэтому вероятность несовпадения дней рождения у третьего с первыми двумя равна $\frac{363}{365}$. Четвёртому «остаётся» 362 дня и т. д. 25-й ученик может «выбирать» из 341 дня. Даты рождения учеников друг от друга не зависят, поэтому вероятность несовпадения дней рождений равна $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{341}{365} \approx 0{,}43$. Таким образом, вероятность того, что хотя бы у двух учеников дни рождения совпадают, равна $1 - 0{,}43 = 0{,}57$.

388. Пусть мужчин и женщин по n, тогда дальтоников среди них $0{,}05n + 0{,}0025n = 0{,}0525n$. Мужчин среди них $0{,}05n$, значит, вероятность выбора среди дальтоников мужчины равна $\frac{0{,}05n}{0{,}0525n} = \frac{20}{21}$.

389. Событие противоположно общему простою всех четырёх машин в выбранный момент. $P = 1 - 0{,}1^4 = 0{,}9999$.

Ответ: 0,9999.

390. Попасть в цель хотя бы раз из n выстрелов — событие, противоположное n промахам подряд. Вероятность должна быть не меньше 0,9. Имеем $1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}9$, $0{,}6^n \leqslant 0{,}1$. $0{,}6^4 = 0{,}1296 > 0{,}1$, $0{,}6^5 = 0{,}07776 < 0{,}1$, значит, $n \geqslant 5$.

Ответ: не меньше пяти выстрелов.

391. Пусть вероятность попадания при одном выстреле равна p. Тогда $1 - \bar{p}^4 = 0{,}9984$, $\bar{p}^4 = 0{,}0016$, $\bar{p} = 0{,}2$, $p = 1 - 0{,}2 =$ $= 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

Глава 7

Комплексные числа

П. 21

410. Пусть $B(x;\ x^2)$ — точка параболы. Тогда $AB = \sqrt{x^4 + (x-4)^2}$. Наименьшее значение этот корень принимает при том же значении x, что и выражение $x^4 + (x-4)^2$. Найдём это значение x:

$$(x^4 + (x-4)^2)' = 4x^3 + 2x - 8;\ x^3 + \frac{x}{2} - 2 = 0.$$

По формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{217}{216}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{217}{216}} - 1} \approx 1{,}128.$$

Теперь найдём искомое расстояние:

$$AB \approx \sqrt{1{,}128^4 + (1{,}128 - 4)^2} \approx 3{,}14.$$

П. 24

436. $\sin\alpha = -\sqrt{1 - 0{,}36} = -0{,}8.$

1) $\sin 5\alpha = 5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha =$
$= 5\cdot 0{,}6^4(-0{,}8) - 10\cdot 0{,}6^2(-0{,}8)^3 + (-0{,}8)^5 \approx 1;$

2) $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha \approx -0{,}84;$

3) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\sin^3\alpha - 3\cos\alpha} \approx -0{,}376.$

439. При $z = i$ получим: $i + \dfrac{1}{i} = i + \dfrac{i}{i^2} = i - i = 0$. Значит,

$\left|i + \dfrac{1}{i}\right| = 0$, отрицательным числом модуль быть не может.

440. $x^2 - y^2 + 2ixy + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, $\begin{cases} 2xy = 0, \\ x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы $x = 0$ или $y = 0$.

При $x = 0$, $-y^2 + |y| = 0$; $y = 0$ или $y = \pm 1$.
При $y = 0$, $x^2 + |x| = 0$; $x = 0$.
Итак, $(0;\ 0)$; $(0;\ 1)$; $(0;\ -1)$.

442. 1) $z^3 = 2 + 2i\sqrt{3} = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$;

$z_{1,\,2,\,3} = \sqrt[3]{4}\,(\cos(20^\circ + 120^\circ\cdot n) + i\sin(20^\circ + 120^\circ\cdot n))$,
где $n = 0, 1, 2$.

Список дополнительной литературы и интернет-ресурсов

Алгебра. Углублённый курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов и др. под ред. М. В. Федотова. — М.: Изд-во Московского ун-та, 2011.

Босс В. Интуиция и математика. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.

Виленкин Н. Я., Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра: пособие для учащихся 1—11 кл. — М.: Просвещение, 2008.

Гашков С. Б. Занимательная компьютерная арифметика: Математика и искусство счёта на компьютерах и без них. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

Громов А. И., Савчин В. И. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие. — М.: РУДН, 2008.

Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие. — М.: Дрофа, 2002.

Клайн М. Математика. Утрата определённости. — М.: Мир, 1984.

Клайн М. Математика. Поиск истины. — М.: Мир, 1988.

Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. — М.: ЛКИ, 2008.

Крамор В. С. Задачи на составление уравнений и методы их решения. — М.: Оникс; Мир и Образование, 2009.

Лурье М. В. Тригонометрия. Техника решения задач. — М.: УНЦ ДО, 2006.

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебраический тренажёр: пособие для школьников и абитуриентов. — М.: Илекса, 2007.

Моденов В. П. Математика для школьников и абитуриентов. — М.: ИКИ; Наука; Физматлит, 2002.

Понтрягин Л. С. Жизнеописание Льва Семёновича Понтрягина, математика, составленное им самим. — М.: КомКнига, 2012.

Рыбкин А. А., Ваховский Е. Б. Сборник задач по математике с решениями для поступающих в вузы. — М.: Оникс, 21 век, 2003.

Садовничий Ю. В., Фролкина О. Д. Геометрия. Конкурсные задачи с решениями. В 5 ч.: учебное пособие. — М.: УНЦ ДО, 2009. — (В помощь поступающим в вузы).

Сборник задач по математике (с решениями). В 2 кн. / под ред. М. И. Сканави. — М.: Оникс 21 век, 2005.

Сборник конкурсных задач по математике для поступающих в вузы / В. М. Говоров, П. Т. Дыбов, Н. В. Мирошин, С. Ф. Смирнова. — М.: Оникс 21 век, 2006.

Суходольский Г. В. Математика для гуманитариев. — М.: Гуманитарный центр, 2007.

Хорошилова Е. В. Элементарная математика. В 2 ч. — М.: МГУ, 2010.

Шарыгин И. Ф. Математика для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 2004.

Шабунин М. И. Пособие по математике для поступающих в вузы. — М.: Физматлит, 2003.

Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики. Математический анализ. Теория вероятностей: пособие для учащихся 10—11 кл. — М.: Просвещение, 2008.

Шибасов Л. П. От единицы до бесконечности. — М.: Дрофа, 2006.

Юшкевич А. П. Из истории возникновения математического анализа. — М.: Знание, 1985.

Якушев Г. М. Большая математическая энциклопедия. — М.: Олма-Пресс, 2005.

http://www.ege.edu.ru/ — Официальный информационный портал единого государственного экзамена.

http://school-collection.edu.ru/ — Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

http://www.turgor.ru/ — Международный математический турнир городов.

http://www.kenguru.sp.ru/ — Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру».

http://kvant.mccme.ru/ — научно-популярный физико-математический журнал «Квант» для школьников и студентов.

http://potential.org.ru/ — образовательный журнал «Потенциал» для старшеклассников по разделам «Физика», «Математика», «Информатика».

http://ilib.mccme.ru/ — Интернет-библиотека Московского центра непрерывного математического образования.

http://www.etudes.ru/ru/ — Математические этюды: познавательные экскурсии по красивым математическим задачам.

http://ru.wikipedia.org — Википедия. История математики.

http://geogebra.ru — Сибирский институт GeoGebra.

http://www.geogebra.org — математическая программа для самообучения школьников.

http://matli.exeter.edu/rparris/winplot.html — программа WinPlot для работы с графиками и др.

ТЕМЫ ПРОЕКТОВ

1. Метод математической индукции.
2. Задачи на максимум и минимум алгебраического, тригонометрического и геометрического содержания.
3. Несобственный интеграл. Понятие о несобственном интеграле. Вычисление несобственного интеграла. Нахождение площади неограниченной области.
4. Естественно-научные приложения закона больших чисел, в том числе законов Менделя.
5. Формула Кардано. Кубические корни из единицы. Метод Кардано решения кубического уравнения. Решение уравнений третьей и четвёртой степеней.
6. Возвратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к квадратным и кубическим с помощью разнообразных замен переменных. Решение задач.
7. Комплексные корни из единицы. Алгебраическая и геометрическая характеристики корней из единицы. Первообразные корни. Функция Эйлера и её свойства.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Корни квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, $b = 2k$	$x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$
$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ $a + b + c = 0$	$x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{c}{a}$
$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ $a - b + c = 0$	$x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{c}{a}$
Формулы Виета	
$x^2 + px + q = 0$	$x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Координаты вершины параболы — графика квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Разложение на множители многочлена n-й степени, имеющего корень x_1

(следствие из теоремы Безу)

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$$

Свойства корней

квадратных	степени n
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $a \geqslant 0, b \geqslant 0$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geqslant 0, b \geqslant 0$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a \geqslant 0,\ b > 0$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geqslant 0, b > 0$
$\sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$, $a \geqslant 0$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, $a \geqslant 0$
$\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$, $a \geqslant 0$	
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geqslant 0$	

Степени и логарифмы

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b\ (b > 0, a > 0, a \neq 1)$
	$a^{\log_a b} = b$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$, $c \neq 1, c > 0, a > 0, b > 0$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$, $c \neq 1, c > 0, a > 0, b > 0$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\log_a (b^c) = c \log_a b$, $a \neq 1, a > 0, b > 0$
$a^x \cdot b^x = (ab)^x$	$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$, $a \neq 1, a > 0, b > 0, c \neq 0$
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, $b \neq 0$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1, c > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1$
	$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, $c \neq 1, c > 0, a > 0, b > 0$

Тригонометрия

Некоторые значения тригонометрических функций

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Формулы приведения

α	$\varphi + 2\pi n$	$-\varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$
$\sin\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\cos\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$

Основные тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Переход от суммы к произведению

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Переход от произведения к сумме

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Вспомогательный угол

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \varphi),$$

$$\text{где } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Универсальная подстановка

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

$\cos x = a$ при $|a| \leqslant 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Дифференцирование и интегрирование

<table>
<tr><th>Функция</th><th>Производная</th><th>Функция</th><th>Первообразная</th></tr>
<tr><td>C</td><td>0</td><td>C</td><td>Cx</td></tr>
<tr><td>x^r</td><td>rx^{r-1}</td><td>$x^r, r \neq -1$</td><td>$\frac{x^{r+1}}{r+1}$</td></tr>
<tr><td>e^x</td><td>e^x</td><td>e^x</td><td>e^x</td></tr>
<tr><td>a^x</td><td>$a^x \ln a$</td><td>a^x</td><td>$\frac{a^x}{\ln a}$</td></tr>
<tr><td>$\ln x$</td><td>$\frac{1}{x}$</td><td rowspan="2">$\frac{1}{x}$</td><td rowspan="2">$\ln x$ или $\ln(-x)$</td></tr>
<tr><td>$\log_a x$</td><td>$\frac{1}{x \ln a}$</td></tr>
<tr><td>$\sin x$</td><td>$\cos x$</td><td>$\sin x$</td><td>$-\cos x$</td></tr>
<tr><td>$\cos x$</td><td>$-\sin x$</td><td>$\cos x$</td><td>$\sin x$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg} x$</td><td>$\frac{1}{\cos^2 x}$</td><td>$\frac{1}{\cos^2 x}$</td><td>$\operatorname{tg} x$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{ctg} x$</td><td>$-\frac{1}{\sin^2 x}$</td><td>$\frac{1}{\sin^2 x}$</td><td>$-\operatorname{ctg} x$</td></tr>
<tr><td>$\arcsin x$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td><td rowspan="2">$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$</td><td rowspan="2">$\arcsin \frac{x}{a}$ или
$-\arccos \frac{x}{a}$</td></tr>
<tr><td>$\arccos x$</td><td>$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
</table>

Окончание табл.

Функция	Производная	Функция	Первообразная
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ или $-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$		

Правила дифференцирования

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x$

Правила интегрирования

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, тогда:

1) функция $F(x) \pm G(x)$ — первообразная функции для
$$f(x) \pm g(x);$$
2) функция $G(x) = kF(x)$ — первообразная функции для
$$g(x) = kf(x);$$
3) функция $G(x) = \frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная функции для
$$g(x) = f(kx+b).$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Муравин Георгий Константинович
Муравина Ольга Викторовна

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Углубленный уровень

11 класс

Учебник

Зав. редакцией *О. В. Муравина*
Художественный редактор *А. В. Пряхин*
Технический редактор *И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *С. Л. Мамедова*
Корректор *Г. И. Мосякина*

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ
знак информационной продукции на данное издание не ставится

Сертификат соответствия
№ РОСС RU. AE51. Н 16508.

Подписано к печати 30.01.14. Формат 60 × 90 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 14-00599.

ООО «ДРОФА». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Сайт ООО «ДРОФА»: www.drofa.ru

Электронная почта: sales@drofa.ru

Тел.: 8-800-200-05-50 (звонок по России бесплатный)

TNM PRINT s.r.o.
Новэ Место 14
Хлумец над Цидлиной 503 51
Чешская Республика
www.tnm.cz
mail.: tnm@tnm.cz
тел.: +420 495 480 878

Представительство типографии в России: ООО «ИНО ПРЕСС». Тел.: +7 (499) 392-0015